Треугольники.

Замечательные точки:

1. *Ортоцентр*- пересечение высот (В).
2. *Центр тяжести*- пересечение медиан (М).
3. *Центр вписанной окружности* - пересечение биссектрис (Б).
4. *Центр описанной окружности* - пересечение серединных перпендикуляров.

Средняя линия треугольника проходит через середины двух его сторон параллельно третьей и равна её половине:

Катет, противолежащий углу 30° равен **половине гипотенузы.**

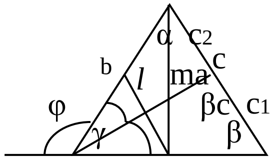
У равнобедренных треугольников:

- **Углы** при основании **равны**.
- **Высота**, опущенная на основание, является **биссектрисой и медианой**.

Треугольники равны по

- 2-м сторонам и углу между ними;
- 2-м углам и прилежащей стороне;
- 3-м сторонам;
- 2-м углам и противолежащей одному из них стороне;
- 2-м сторонам и углу, лежащему против большей из них

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$
$$\varphi=\alpha+\beta$$



Свойства медиан, биссектрис:

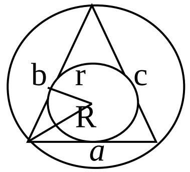
- *При пересечении медианы делятся в пропорции* 2:1.
- *Медиана делит площадь треугольника пополам.*
- *Три медианы делят треугольник на* **6** *равновеликих треугольника.*

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}\ .$$

- ***Биссектриса****. делит противоположные стороны на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам:*

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{a}{b}, \qquad \beta_c=\sqrt{a\cdot b-c_1\cdot c_2}\ .$$

Средняя линия треугольника: $l \parallel c; \quad l=c\setminus 2.$



$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S_\Delta};$$

$$r=\frac{2S_\Delta}{a+b+c}=\frac{S_\Delta}{p}; \qquad p=\frac{a+b+c}{2};$$

r - радиус вписанной окружности;

R - радиус описанной окружности.

Для прямоугольных треугольников:

$$r=\frac{a+b-c}{2}; \qquad R=\frac{c}{2};$$

Для правильных треугольников:

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}; \qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}; \qquad S_\Delta=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Треугольники подобны если

- 3 стороны одного пропорциональны 3-м сторонам другого;
- 2 угла одного равны 2-м углам другого;
- 2 стороны одного пропорциональны 2-м сторонам другого и углы между ними равны.

Свойства подобных треугольников:

- Площади подобных треугольников пропорциональны квадратам их сходственных сторон:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{b_1^2}{b_2^2}=\frac{c_1^2}{c_2^2}=k^2,$$

- Периметры подобных треугольников пропорциональны их сходственным сторонам:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

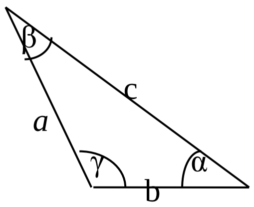
- **Высота** прямоугольного треугольника, проведенная из вершины **прямого угла,** делит его на **два подобных**, **каждый** из которых **подобен данному.**

Теорема косинусов:

$$b^2=a^2+c^2-2a\cdot c\cdot\cos\beta$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$



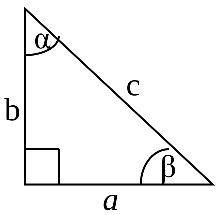
Площадь треугольника:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha; \qquad S_\Delta=\ p\cdot r;$$

$$S_\Delta=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}; \qquad S_\Delta=\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha};$$

$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - формула Герона

Прямоугольные треугольники:



$$a^2=c\cdot a_c$$
$$b^2=c\cdot b_c$$
$$h_c=\sqrt{a_c\cdot b_c}$$

$c^2=a^2+b^2$ **- теорема Пифагора**

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}; \qquad \cos\beta=\frac{a}{c} \qquad tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=\frac{a}{b};$$

$$a=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\cos\beta=b\cdot tg\alpha=b\cdot ctg\beta;$$
$$b=c\cdot\sin\beta=c\cdot\cos\alpha=a\cdot tg\beta=a\cdot ctg\alpha.$$

Дополнительная информация:

- **Медиана**, проведенная из вершины прямого угла равна **половине гипотенузы**.

- Если медиана, высота и биссектриса, проведенные к разным сторонам, пересекаются в одной точке, то треугольник **равносторонний**.

Четырехугольники.

1.Для любого **четырехугольника** $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\beta$,

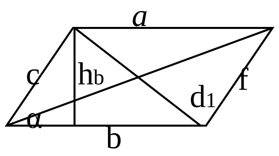
где β - острый угол между диагоналями**.**

2. В любой **четырехугольник** можно **вписать окружность**, если **суммы** противоположных **сторон равны**.

3. Около любого **четырехугольника** можно **описать окружность,** если **суммы** противоположных **углов** в нем **равны** 180° .

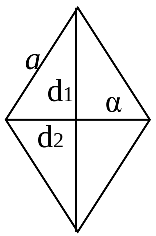
4. **Диагонали четырехугольника перпендикулярны**, если **сумма квадратов** противоположных сторон **равна сумме квадратов** двух других сторон.

Параллелограмм:



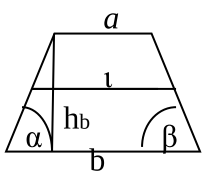
1. $a = b; \quad c = f$.
2. Противолежащие углы равны.
3. Диагонали в точке пересечения делятся пополам.
4. $d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + c^2\right)$.
5. $S_{пар} = b \cdot h_b = bc \cdot \sin\alpha$.

Ромб:



1. $a = b = c = f$.
2. Диагонали являются биссектрисами.
3. $d_1 \perp d_2$.
4. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.
4. $S_{ром} = a^2 \sin\alpha = \frac{d_1 d_2}{2}$

Трапеция:



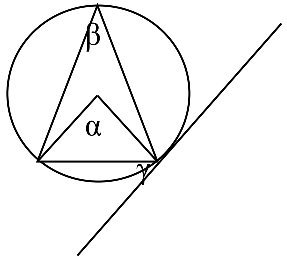
1. $l = \frac{a+b}{2}$ - средняя линия трапеции.
2. $S_{тр} = l \cdot h_b$.

В равнобочной трапеции:

$\alpha = \beta$; $\quad d_1 = d_2$.

- если $d_1 \perp d_2$, то $S_{тр} = h^2$

Окружности и углы.



α - центральный угол;

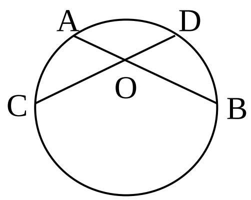
β - вписанный угол;

γ - угол между хордой и касательной

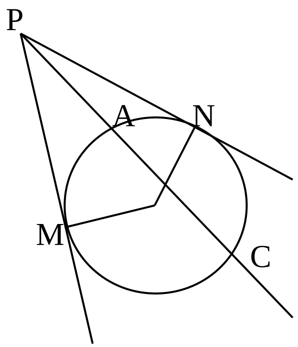
$$\beta = \frac{1}{2}\alpha;$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\alpha$$

Вписанный угол**,** опирающийся на **диаметр** равен 90°



$$CO \cdot OD = AO \cdot OB$$



PM = PN - касательные, проведенные из одной точки к окружности равны.

$$\left(PM\right)^2 = PC \cdot PA,$$

где **PC** - секущая.

$C = 2\pi R$ - длина окружности;

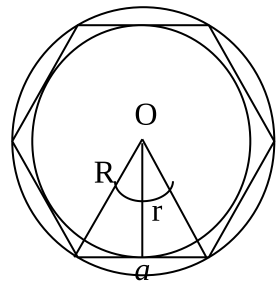
$S = \pi R^2$ - площадь круга;

$L = \frac{\pi R \alpha^\circ}{180^\circ}$ - длина дуги;

$S_{сект} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$ - площадь кругового сектора;

$S_{сегм} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \mp S_\Delta$ - площадь сегмента

Правильные многоугольники.



$$r = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}};$$

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \cdot n \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}$$

Правильный треугольник:

$\alpha = 60^\circ$; $\quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $\quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

Сумма углов = 180°.

Правильный четырехугольник:

$\alpha = 90^\circ$; $\quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\quad r = \frac{a}{2}$;

Сумма углов = 360°.

Правильный шестиугольник:

$\alpha = 120^\circ$; $\quad R = a$; $\quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

Сумма углов = 720°.