ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Рудин В.Н.   Рудина Е.И.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

(Пособие для абитуриентов)

ТОМСК - 2002

Рассмотрено и утверждено методической комиссией механико-математического факультета.

Протокол от 2002 года №

Председатель комиссии: доцент ММФ Г.Г.Пестов

Авторы:

старший преподаватель ТГУ ММФ Рудин В.Н

преподаватель ТПТ Рудина Е.И.

Данное пособие посвящено текстовым задачам, т.е. задачам с практическим содержанием. Задачи классифицированы по способам решения и роду деятельности. Даны решения задач всех типов, приводятся задачи для самостоятельного решения. Ко всем задачам есть ответы. Многие задачи, приведенные в пособии, предлагались абитуриентам на вступительных экзаменах в различные ВУЗы. Пособие предназначено для школьников старших классов, абитуриентов и учителей математики.

Введение

В предлагаемых задачах с практическим содержанием рассматриваются только те реальные процессы, которые с достаточной степенью точности можно описать алгебраическими уравнениями и неравенствами или системами таких уравнений и неравенств. В соответствии с рассматриваемыми процессами все задачи делятся на три условных группы по роду деятельности: задачи на движение, задачи на пропорции и проценты, задачи на совместную работу. Каждый тип задач предполагает некоторые допущения, основанные в большинстве своем на здравом смысле.

Основные допущения, которые обычно принимаются в условиях задач на движение, состоят в следующем:

1. Движение на отдельных участках считается равномерным, т.е. пройденный путь прямо пропорционален скорости и времени движения.
2. Скорость, время движения, пройденный путь, как и в реальной жизни, считаются положительными.
3. Повороты движущихся тел происходят без затрат времени.
4. Скорость тела, движущегося по течению реки, представляет собой сумму собственной скорости тела и скорости течения реки. Так плот, имеющий собственную скорость равную нулю, движется со скоростью течения.

В задачах на проценты и пропорции мы предполагаем, что:

1. Все получающиеся сплавы и смеси являются однородными.
2. При слиянии различных растворов их смешивание происходит мгновенно.
3. При сливании двух растворов объем смеси равен сумме объемов сливаемых растворов.
4. Объемы растворов и массы сплавов не могут быть отрицательными.

В задачах на совместную работу обычно предполагается, что:

1. Производительность труда рабочих постоянна в указанные промежутки времени, а объем выполненной работы прямо пропорционален производительности труда и времени работы.
2. Скорость течения жидкостей по трубам, наполняющим и опустошающим бассейн, постоянна в указанные промежутки времени.
3. Открывание и закрывание кранов, регулирующих поступление жидкости, происходит без затрат времени.
4. Производительность труда, объем работы, скорость движения жидкости, заработанная сумма, время - величина положительные.

Во многих задачах, особенно в задачах на проценты и пропорции, изучаемый процесс определен не полностью. Есть неизвестные

величины, которые невозможно определить из условия задачи, причем любое разумное значение этих величин не влияет на получаемый ответ. Обычно значение таких величин принимают за условную единицу. Однако в задачах, решаемых арифметическим способом, удобнее, чтобы не иметь дело со сложными вычислениями и дробями, принимать значения таких неизвестных за несколько условных единиц. К введению таких условных единиц необходимо подходить с достаточной степенью осторожности, так как избыточное введение таких величин может лишить, задачу необходимой общности и повлиять на ответ или даже привести к противоречию, а недостаток их затруднит решение задачи.
В начале 1 и 2-й глав приведены подробные схемы решения задач соответствующих типов. Схем этих необходимо придерживаться, так как они помогут выработать определенный стиль логического мышления, необходимый при решении любых математических задач, в частности, задач на составление уравнений и неравенств.

ГЛАВА I. Арифметический способ решения задач.

Алгебраизация математического образования, неверное убеждение в том, что с помощью уравнений мы можем эффективно решать любую текстовую задачу, привели к почти полному исчезновению подобного вида задач из школьного математического курса. Однако именно этот способ решения задач, не требуя никаких знаний кроме арифметики в объеме начальной школы, позволяет заложить у учащихся основы логического мышления. Рационально мыслить и рационально считать - таков девиз этого способа решения задач. Овладевшие этим способом легко справятся с любой задачей на составление уравнений.
Основные этапы решения задачи:

1. Прочитав внимательно условие задачи, необходимо четко представить происходящий в задаче процесс и понять его сущность. Для облегчения понимания можно нарисовать поясняющую схему.
2. Выяснить, что неизвестно и что играет определяющую роль для решения данной задачи. Наметить рациональный путь решения. Если необходимо, то умело ввести условные величины, облегчающие счет. Общее правило для выбора условных единиц дать сложно. Заметим только, что часто количество условных единиц равно наименьшему общему кратному числовых величин, входящих в условие задачи.
3. Записывая отдельные существенные мысли, шаг за шагом идти по намеченному плану к ответу на доставленный вопрос.
4. Если есть сомнения в правильности полученного ответа, то необходимо сделать проверку. Проверка делается непосредственно **по условию** задачи.
5. Записать четкий ответ на вопрос задачи.

1.1. Задачи на движение.

Задача 1. Поезд проходит мимо телеграфного столба за 15 сек., а мимо моста длиной 700 метров за 50 сек. Вычислить скорость движения поезда и его длину.

Решение:

1. Двигаясь мимо столба, поезд проходит путь, равный длине поезда, за 15 сек.
2. Двигаясь мимо моста, поезд проходит путь, равный сумме длин моста и поезда за 50 сек.
3. Путь, равный длине моста, поезд проходит за $50 - 15 = 35$ (сек).
4. Скорость поезда равна $700 : 35 = 20$ (м/сек) или $20 \cdot 3{,}6 = 72$ (км/час).
5. Длина поезда равна $20 \cdot 15 = 300$ (м).

Ответ: Скорость движения поезда 72 км/час, длина поезда 300 м.

Задача 2. Два самолета вылетели из пункта А одновременно в одном и том же направлении: один со скоростью 350 км/час, другой со скоростью 280 км/час. Через два часа первый самолет уменьшил скорость до 230 км/час. На каком расстоянии от пункта А второй самолет догонит первого?

Решение:

1. Первый самолет удаляется от второго со скоростью $350 - 280 = 70$ (км/час).
2. За два часа полета первый самолет удалился от второго на $70 \cdot 2 = 140$ (км).
3. Второй самолет стал догонять первый самолет со скоростью $280 - 230 = 50$ (км/час).
4. Второй самолет догонит первый самолет за $140 : 50 = 2{,}8$ (час).
5. Общее время движения второго самолета $2 + 2{,}8 = 4{,}8$ (час).
6. Путь, пройденный вторым самолетом, $280 \cdot 4{,}8 = 1344$ (км)

Ответ: Второй самолет догонит первого на расстоянии 1344 (км) от пункта А.

Задача 3. Моторная лодка должна проплыть расстояние между городами А и В за определенное время. Если она будет плыть со скоростью 35 км/час, то затратит на весь путь на 2 часа больше, чем нужно. Если лодка будет плыть со скоростью 50 км/час, то затратит на 1 час меньше, чем нужно. Каково расстояние между А и В? Сколько времени должна была плыть лодка?

Решение:

1. Плывя со скоростью 35 км/час, лодка за назначенное время не доплывет до В 35 · 2 = 70 (км).

2. Плывя со скоростью 50 км/час, лодка за назначенное Время проплывет лишних 1 · 50 = 50 (км).

3. Разность этих путей равна 50 + 70 = 120 (км).

4. Разность соответствующих скоростей равна
50 - 35 = 15 (км).

5. Лодка должна была плыть 120 : 15 = 8 (часов).

6. Со скоростью 50 км/час лодка плыла до города В
8-1=7 (час).

7. Расстояние между городами 50 ·7 = 350 (км).

Ответ: Расстояние между городами А и В, равное 350 км**,** лодка должна была проплыть за 8 часов.

Задача 4. Чтобы прибыть в назначенный срок из деревни в город пешеход должен был идти со скоростью 4 км/ч. Пройдя половину своего пути с намеченной скоростью, пешеход остальную часть пути проехал на попутной машине со скоростью 20 км/ч, а потому прибыл в город на 2 часа раньше назначенного срока. Определить расстояние от города до деревни.

Решение:

1. Пешеход должен был проходить каждый километр пути
за 60 : 4 = 15 (мин).

2. Каждый километр первой половины пути пешеход проходил за 15 мин.

3. Каждый километр второй половины пути пешеход Проходил за 60 : 20 = 3 (мин).

4. В среднем каждый километр пути пешеход проходил за
(15 + 3) : 2 = 9 (мин).

5. Экономия времени на каждом километре пути составляет
15 - 9 = 6 (мин).

6. Так как общая экономия времени составила 2 часа или 120 минут, то расстояние от города до деревни равно 120 : 6 = 20 (км).

Ответ: Расстояние между городом и деревней равно 20 километров.

Задача 5. В 8 часов утра из пункта А вышел автобус, а в 9 часов вслед за ним вышла легковая машина. Автобус прибыл в пункт В в 2 часа дня, а легковая машина - в 1 час30 мин дня. Скорость легковой машины на 20 км/ч больше скорости автобуса. На каком расстоянии от пункта А легковая машина догнала автобус?

Решение:

1. Автобус шел до пункта В 14 - 8 = 6 часов.

2. Легковая машина была в пути 13,5 - 9 = 4,5 часа.

3. За 4,5 часа легковая машина пройдет на 4,5∢ 20 = 90 километров больше, чем автобус.

4. Автобус был в пути на 6 - 4,5 = 1,5 часа дольше.

5. Скорость автобуса равна 90 : 1,5 = 60 км/час.

6. Скорость легковой машины равна 60 + 20 = 80 км/час.

7. До выхода легковой машины автобус прошел путь

$60 \cdot 1 = 60$ км.

8. Машина догнала автобус, через $60 : 20 = 3$ часа после начала своего движения.
9. За это время легковая машина прошла $80 \prec 3 = 240$ км.

Ответ: Легковая машина догонит автобус на расстоянии 240 км. от А.

Задача 6. Расстояние между городами А и В пароход проплывает по течению реки за 3 часа, а против течения за 4,5 часа. За какое время проплывет то же расстояние бочонок, брошенный в воду?

Решение:

1. Пароход проплывает за 1 час по течению реки 1/3 всего пути.
2. Пароход против течения реки проплывает

$1 : 4{,}5 = 2/9$ всего пути.

3. По течению реки пароход проходит в час на $1/3 - 2/9 = 1/9$ часть пути больше, чем против течения.

4. Течение сносит пароход на $1/9 : 2 = 1/18$ всего пути за один час.

5. Время движения бочонка равно $1 : 1/18 = 18$ часам.

Ответ: Бочонок проплывет расстояние между городами А и В за 18 часов.

Задача 7. Два автомобиля, выходя одновременно навстречу друг другу из двух городов, могут встретиться через 6 часов. Скорости автомобилей относятся как 4:3. На сколько часов позже второго автомобиля должен выехать первый автомобиль, чтобы их встреча произошла ровно на середине пути между городами?

Решение: 1. Оба автомобиля проходят за час вместе $1 : 6 = 1/6$ часть всего пути,

2. Допустим, что скорость первого автомобиля составляет 4 условные единицы, тогда скорость второго составляет 3 условные единицы.

3. За час оба автомобиля проходят путь равный $3 + 4 = 7$ условным единицам.

4. Одной условной единице соответствует $1/6 : 7 = 1/42$ часть всего пути.

5. За час пути первый автомобиль проходит $1/42 \cdot 4 = 2/21$ всего пути.

6. Половину всего пути первый автомобиль проходит за $1/2 : 2/21 = 5{,}25$ часа.

7. За час пути второй автомобиль проходит $1/42 \cdot 3 = 1/14$ всего пути.

8. Половину всего пути второй автомобиль пройдет за $1/2 : 1/14 = 7$ часов.

9. Первый автомобиль должен выехать позже второго на

$7 - 5{,}25 = 1{,}75$ часа.

Ответ: Первый автомобиль должен выехать позже второго на 1,75 часа.

Задача 8. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 22,4 км, одновременно выезжают два мотоциклиста. Если они поедут навстречу друг другу, то встретятся через полчаса после выезда. Если же поедут в одном направлении, то второй догонит первого через 3,5 часа после выезда. Чему равна скорость каждого мотоциклиста?

Решение:

1. Сумма скоростей мотоциклистов равна
 22,4 : 0,5 = 44,8 км/час.
2. Разность скоростей мотоциклистов ровна
 22,4 : 3,5 = 6,4 км/час.
3. Двойная скорость второго мотоциклиста равна
 44,8 +6,4 = 51,2 км/час.
4. Скорость второго мотоциклиста 51,2 : 2 = 25,6 км/час.
5. Скорость первого мотоциклиста 44,8 - 25,6 = 19,2км/чае.

Ответ: Скорость первого мотоциклиста 19,2 км/час, второго 25,6 км/час.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В 8 часов 30 минут утра из двух пунктов в одном направлении выходят два автомобиля. Автомобиль, идущий позади, проходит расстояние между пунктами за 2,2 часа. Передний автомобиль движется медленнее заднего, а их скорости относятся как 17:50. В какое время второй автомобиль догонит первого?

Ответ: В 11 часов 50 минут.

2. В 8 часов утра из города А выехал велосипедист. В 8 часов 30 минут вслед за ним выехал второй велосипедист. То расстояние, которое первый велосипедист проезжает за 5 часов 15 минут, второй проезжает за 4часа 40 минут. В котором часу второй велосипедист догнал первого?

Ответ: В 12 часов 30 минут.

3. Из двух городов навстречу друг выехали две машины. Первая машина выехала в 7 часов утра и прошла всё расстояние между городами за 3 часа 36 минут. Вторая выехала в 7 часов 20 минут и прошла весь путь за 2 часа 42 минуты. В котором часу произошла встреча машин?

Ответ: В 8 часов 44 минуты.

4. Велосипедист проехал 5/7 всего пути и еще 40 км. После этого ему осталось проехать 3/4 всего пути без 118 км. Чему равен весь путь?

Ответ: 168 км.

5. Расстояние между двумя городами автомобиль должен был проехать за 10 часов. Сначала он ехал со скоростью 40 *км/ч.* Когда до половины пути осталось 100 км, чтобы прийти вовремя, он увеличил скорость на 20 км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля?

Ответ: 52 км/час.

6. Моторная лодка плывет со скоростью 28 км/ч по течению и 20 км/ч против течения. Какое расстояние прошла лодка по течению реки, если она отправилась в 10 часов 30 минут утра и возвратилась, нигде не останавливаясь, в16 часа 30 минут ?

Ответ: 70 км.

7. Если бы пешеход, отправляясь на железнодорожную станцию, шел со скоростью 3,5 км/ч**,** то он пришел бы на станцию через 30 минут после отхода поезда. Если же он будет проходить по
4,2 км/ч, то придет на станцию за 20 минут до отхода поезда. Какое расстояние должен пройти пешеход?

Ответ: 17,5 км.

8. В 6 часов утра из А и В вышел пешеход. В 10 часов утра из В в А выехал велосипедист и встретил пешехода в час дня. Расстояние между А и В равно 62 км. Найти скорость каждого, если отношение их скоростей равно 0,28**.**

Ответ: 3,5 км/час и 12,5 км/час.

9. Поезд проходит данное расстояние за 10 часов. Если бы он проходил в час на 10 км больше, то ехал бы всего 8 часов. Определить данное расстояние и скорость поезда.

Ответ: 400 км и 40 км/ч.

10. Расстояние между двумя портами 301 км. Из первого порта в 0 часов 45 минут вышел пароход во второй порт. В 3 часа 5 минут из второго порта вышел другой пароход, который проходил в час на 6 км больше, чем первый. Пароходы встретились в то же утро в 7 часов 25 минут. Какова скорость каждого парохода и на каком расстоянии от первого порта они встретились?

Ответ: 25 км/ч, 31 км/ч, 166 2/3 км.

11. Туристы совершили переход на велосипедах в течение трех дней. В первый день они прошли 1/3 всего пути без 2 км.
Во второй день половину оставшегося пути без 3 км. В третий день 8/9 оставшегося пути и еще 6 км. Сколько километров проехали туристы за 3 дня?

Ответ: 150 км.

12. Велосипедист выехал из А в В в 6 часов 5 минут, а вернулся по той же дороге в 11часов 26 минут того же утра. Зная, что из А в В он ехал со скоростью 18 км/час, а обратно со скоростью 16 км/час, и что в В он задержался на 15 минут, определить расстояние между А и В.

Ответ: 43,2 км.

13. Разведовательное судно, скорость которого 25 км/час, получило задание произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения и вернуться через 3 часа. Вычислить, через сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть обратно, чтобы вовремя встретить эскадру, если известно, что эскадра шла со скоростью 15 км/ч?

Ответ: 2 часа 24 минуты.

14. Пешеход А, идя со скоростью 4 км/ч, догоняет пешехода В, идущего со скоростью 3 км/ч. Когда расстояние между ними было 0,5

км, муха, сидевшая на шляпе А, полетела от него к В, от него обратно к А и летала так до тех пор, пока А догнал В. Сколько километров пролетела муха, если ее скорость 10 км/ч?

Ответ: 5 км.

15. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 6 км, выезжают по одной дороге и в одном направлении два велосипедиста. Если велосипедисты выедут одновременно, то второй догонит первого через 3 часа. Если же второй выедет на 1 час позже первого то догонит его через 8 часов. С какой скоростью едет каждый велосипедист?

Ответ: 12 км/час и 10 км/час, соответственно.

1.2. Задачи на проценты и пропорции.

Задача 1. Число коров на одной молочной ферме на 12,5% меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на 8% выше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

Решение:

1. Предположим, что на второй ферме 8 у.к. (условных коров) и каждая дает 25 у.л. (условных литров) молока в день.

2. На первой ферме меньше на $8 \cdot 12{,}5 : 100 = 1$ у.к.,
т.е. всего 7 у.к.

3. Удой коровы на первой ферме больше на $25 \cdot 8 : 100 = 2$ у.л. и составляет в среднем $25 + 2 = 27$ у.л. молока в день.

4. Количество молока, получаемого на первой ферме, составляет $7 \cdot 27 = 189$ у.л.

5. Количество молока, получаемого в день на второй ферма, составляет $8 \cdot 25 = 200$ ул.

6. На первой ферме получают молока на $200 - 189 = 11$ у.л. молока меньше, чем на второй. Это составляет

$11 : 200 \cdot 100 = 5{,}5\%$

Ответ: На первой ферме получают на 5,5%. молока меньше, чем на второй.

Задача 2. Объем строительных работ увеличивается на 80%. На сколько процентов нужно увеличить число рабочих, если производительность труда будет увеличена на 20%.

Решение:

1. Пусть объем строительных работ составляет 100 условных единиц, а каждый рабочий способен выполнить 10 у.е.р. (условных единиц работы) за некоторое фиксированное время.

2. Для выполнения указанной работы за это время необходимо иметь $100 : 10 = 10$ рабочих.

3. Новый объем работ равен $100 + 80 = 180$ у.е.р.

4. Новая производительность труда рабочего равна

$10 + 2 = 12$ у.е.р.

5. Количество рабочих, необходимых для выполнения нового объема работы при новой производительности труда, равно

$$180 : 12 = 15 \text{ человек}.$$

6. Количество рабочих увеличилось на 15 - 10 = 5 человек, что составляет $5 : 10 \cdot 100 = 50\%$ от первоначального количества рабочих.

Ответ: Количество рабочих необходимо увеличить на 50%.

Задача 3. Заработок рабочего повысился на 20%, а цены на товары понизились на 25%. На сколько процентов рабочий теперь на свой заработок может купать больше товаров, чем прежде?

Решение:

1. Пусть заработок рабочего составляет 100 условных единиц, а стоимость товара 20 условных единиц за единицу товара.
2. Прежде рабочий мог купить 100 : 20 = 5 единиц товара.
3. Новый заработок рабочего равен: 100 + 20 = 120 у.е.
4. Новая цена товара $20 - 20\cdot 0{,}25 = 15$ у.е.
5. Новое количество товара 120 : 15= 8 единиц.
6. Рабочий может купить на 8-5=3 единицы товара больше, чем раньше. Это составляет $(3:5) \cdot 100 = 60\%$ от первоначального количества.

Ответ: Рабочий может купить товаров на 60% больше, чем раньше.

Задача 4. Пять литров сливок с содержанием жира 35% смешали с четырьмя литрами сливок, содержащих 20% жира. К смеси добавили один литр чистой воды. Какой жирности получилась смесь?

Решение:

1. Количество жира в пяти литрах сливок $5 \cdot 0{,}35 - 1{,}75$ л.
2. Количество жира в пяти литрах сливок $4\cdot 0{,}2 = 0{,}8$ л.
3. Общее количество жира в смеси $1{,}75 + 0{,}8= 2{,}55$ л.
4. Общий объем смеси 5 + 4 + 1 = 10 л.
5. Жирность смеси $2{,}55 : 10\cdot 100 = 25{,}5\%$

Ответ: Жирность смеси составляет 25,5%

Задача 5. Три бригады начали одновременно пахать поле. Производительность первой бригады относится к производительности второй, как 5:4. Производительность второй бригады относится к производительности третьей, как 2 : 1,5. Первая бригада увеличила производительность на 10%, вторая - на 20% и третья на 10%. В результате, первая бригада вспахала за день на 14 га больше, чем вторая. Сколько гектаров вспахала каждая бригада за день?

Решение:

1. Пусть производительность третьей бригады равна 30 условных единиц пашни за определенное время. Тогда производительность второй бригады равна 40, а производительность первой 50 условных единиц.
2. Новая производительность первой бригады равна

$$50 \cdot (1+ 0{,}1) =55 \text{ у.е. в день}.$$

3. Новая производительность второй бригады

$$40 \cdot (1 + 0{,}2) =48 \text{ у.е. в день}.$$

4. Новая производительность третьей бригады

$$30\cdot(1+0{,}1)=33 \text{ у.е. в день.}$$

5. По условию задачи 14 га составляют 55 - 48 = 7 условных единиц, то есть одной условной единице соответствуют 2 га.

6. Первая бригада вспахала 55 ·2 = 110 га.

7. Вторая бригада вспахала 48 ·2 = 96 га.

8. Третья бригада вспахала 33 ·2 = 66 га.

Ответ: За день работы бригады вспахали соответственно 110, 96 и 66 гектаров земли.

Задача 6. В двух канистрах имеется 16 литров бензина. Из каждой канистры отлили по 1 литру бензина, в результате25% бензина, оставшегося в первой канистре, составляют 1/3 бензина, оставшегося во второй канистре. Сколько литров бензина было в каждой канистре?

Решение:

1. Если в первой канистре осталось 4 условных единицы бензина, то во второй канистре осталось 3 условных единицы бензина. Действительно, в этом случае 25% бензина первой канистры и 1/3 бензина второй канистры равны по одной условной единице.

2. Всего в первой и второй канистре находится 3 + 4 = 7 условных единиц бензина, что составляет 16 - 1 - 1= 14 литров.

3. Одной условной единице бензина соответствует 14 : 7 = 2 литра.

4. В первой канистре было 2 ·4 + 1 = 9 литров бензина.

5. Во второй канистре было 2· 3 + 1 = 7 литров бензина.

Ответ: В канистрах было 9 и 7 литров бензина.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В бассейн проведена труба. Вследствие засорения ее приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие этого увеличится время, необходимое для заполнения бассейна?

Ответ: На 150%.

2. Слиток сплава серебра с цинком содержит 76% серебра и весит 3,5 кг. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом 10,5 кг, содержание серебра в котором было 84%. Сколько процентов серебра содержал второй слиток?

Ответ: 88%

3. Древесина только что срубленного дерева содержит 64% воды. Через неделю содержание воды в дереве уменьшилось до 46%. На сколько уменьшился при этом вес дерева, если свежесрубленное дереве весило 750.кг?

Ответ: На 250 кг.

4. Молоко одной коровы содержит 5% жира, а молоко другой 3,5%. Однако, удой второй коровы на 30% выше. Сколько надо взять молока первой коровы, чтобы получить жира на 5,4 кг больше, чем в молоке второй коровы, надоенном за такое же время?

Ответ: 1200 кг.

5. Найти возраст брата и возраст сестры, если 62,5% возраста сестры больше 75% возраста брата на 2 года, а 50% возраста сестры больше 37,5% возраста брата на 7 лет.

Ответ: 32 и 24.

6. Один рабочий выточил на станке за неделю 960 деталей и израсходовал при этом 12 резцов. Другой рабочий выточил 640 деталей и израсходовал 10 резцов. Кто экономнее расходовал резцы и на сколько процентов?

Ответ: Первый на 20% экономнее второго.

7. От двух кусков сплава одинакового веса, но с различным содержанием меди, отрезали по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого куска?

Ответ: В 2 раза.

8. Два магазина получили для продажи 2490 кг сахара. Сколько сахара получил каждый магазин, если 6,5% сахара, полученного первым магазином, весят столько же, сколько 8,5% сахара, полученного вторым?

Ответ: 1411 и 1079 кг

9. Два мальчика хотят купить шахматы. У первого не хватает для покупки 10% стоимости шахмат, у второго не хватает 1/6 их стоимости. Сколько рублей стоят шахматы, если оба мальчика вместе имеют на 22 рубля больше, чем нужно для покупки шахмат?

Ответ: 30 рублей.

10. В первую поездку автомобиль израсходовал 25% бензина, имеющегося в баке. Во вторую поездку автомобиль израсходовал 20% оставшегося бензина. После этого в баке осталось на 2 литра бензина больше, чем было израсходовано за обе поездки. Сколько литров бензина было первоначально в баке?

Ответ: 10 литров.

11. Только что добытый каменный уголь содержит 5% воды. В течение некоторого времени он впитывает в себя еще некоторое количество воды и содержит уже 24%. На сколько увеличивается при этом вес 50 тонн только что добытого угля?

Ответ: на 12,5 тонн.

12. Когда цену билета на стадион понизили, то количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько копеек понижена цена билета, если первоначально он стоил 1 рубль 50 копеек?

Ответ: На 25 копеек.

13. Из двух сплавов, содержащих 60% и 80% меди соответственно, необходимо получить 40 кг сплава, содержащего 75% меди. Сколько килограмм каждого сплава нужно взять для этого?

Ответ: 10 кг и 30 кг.

14. Ширину прямоугольника увеличили на 3,6 см, а длину уменьшили на 16%. В результате площадь нового прямоугольника оказалась больше прежнего на 5%. Найти ширину нового прямоугольника.

Ответ: 18 см.

15. При проверке влажности зерна она оказалась равной 19%. После просушки 200 кг зерна, оно стало легче на 20 кг. Какова влажность зерна после просушки?

Ответ: 10%

1.3. Задачи на совместную работу.

Задача 1. Чтобы выкачать из цистерны нефть, поставили 2 насоса разной мощности. Оба насоса выкачивает всю нефть за 12 минут. Однако после 4 минут совместной работа, первый насос сломался и второму пришлось работать еще 24 минуты, чтобы выкачать оставшуюся нефть. За сколько минут каждый насос, действуя отдельно, мог бы выкачать всю нефть из цистерны?

Решение:

1. Пусть в цистерне находится 36 условных единиц нефти.
2. Оба насоса выкачивают 36 : 12 = 3 условных единицы нефти в минуту.
3. За 4 минуты совместной работа оба насоса выкачают
   $4 \cdot 3 = 12$ единиц нефти.
4. Останется 36 - 12 = 24 единиц нефти.
5. Второй насос выкачивает за одну минуту 24 : 24 = 1 у.е. нефти.
6. Всю нефть второй насос выкачивает за 36 : 1 = 36 минут.
7. Первый насос выкачивает за одну минуту 3 - 1=2 у.е. нефти.
8. Всю нефть первый насос выкачивает 36 : 2 в 18 минут.

Ответ: Насосы выкачивают нефть за 18 и 36 минут соответственно.

Задача 2. Обрабатывая по 20 деталей в час, рабочий сделает на 32 детали меньше дневной нормы. Обрабатывая по 27 деталей в час, рабочий сделает на 24 детали больше нормы. Сколько деталей в день он должен обрабатывать по норме?

Решение:

1. Производительность во втором случае выше на 27 - 20 = 7 деталей в час.
2. Разность между количеством деталей, изготовленных во втором и первом случаях, равна 32 + 24 = 56 деталей.
3. Рабочий день составляет 56 : 7 = 8 часов.
4. Норма дневной выработки рабочего составляет
   $20 \cdot 8 + 24 = 192$ детали.

Ответ: Дневная норма составляет 192 детали.

Задача 3. Чтобы наполнить ванну, вместимостью 160 литров за 25 минут, открыли сначала кран с горячей водой, через который в одну минуту вливается 6 литров воды. Затем этот кран закрыли и открыли кран с холодной водой через который в одну минуту вливается 8 литров воды. Сколько времени был открыт каждый кран?

Решение:

1. Если бы все время был открыт кран с горячей водой, то в ванну налилось бы $25 \cdot 6 = 150$ литров воды.

2. Недостача воды составит $160 - 150 = 10$ литров.

3. Производительность крана с холодной водой больше, чем производительность крана с горячей водой на $8 - 6=2$ литра.

4. Кран с холодной водой должен работать $10 : 2 = 5$ минут.

5. Кран с горячей водой должен работать $25 - 5 = 20$ минут.

Ответ: Краны с горячей и холодной водой открыты 20 и 5 минут, соответственно.

Задача 4. Две бригады должны были убрать картофель с двух одинаковых по площади участков. Первая убирала ежедневно по 3,2 га и через несколько дней ей осталось убрать картофель с 4 га. Вторая бригада убирала по 2,8 га в день, но работала на два дня дольше первой бригады, и ей осталось убрать участок в 0,4 га. Чему равна площадь участка, с которого должна была убрать картофель каждая бригада?

Решение:

1. За два дня вторая бригада убрала $2{,}8 \cdot 2 = 5{,}6$ га.

2. В тот момент, когда первой бригаде осталось убрать 4 га, второй осталось убрать $5{,}6 + 0{,}4 = 6$ га.

3. В этот момент времени второй бригаде осталось убрать больше, чем первой на $6 - 4 = 2$ га.

4. Первая бригада убирала в день на $3{,}2 - 2{,}8 = 0{,}4$ га больше, чем вторая.

5. Первая бригада работала $2 : 0{,}4 = 5$ дней.

6. Площадь каждого участка $3{,}2 \cdot 5 + 4 = 20$ га.

Ответ: Площадь каждого участка 20 га.

Задача 5. Один рабочий может выполнить заказ за 6 дней, а другой - за 15 дней. Сначала работал первый рабочий, а затем закончил работу второй. Заказ был выполнен за 9 дней, Сколько деталей было изготовлено, если первый сделал на 150 деталей больше, чем второй?

Решение:

1. Пусть весь заказ составляет 30 условных единиц, тогда первый рабочий выполняет по $30 : 6 = 5$ у.е. заказа в день, а второй по $30 : 15 = 2$ у.е. в день.

2. Первый рабочий выполняет на $5 - 2 = 3$ у.е. заказа в день больше, чем второй.

3. Если бы работал только второй рабочий, то за 9 дней он бы выполнил $2 \cdot 9 = 18$ у.е. заказа.

4. В этом случае останется невыполненным $30 - 18 = 12$ у.е. заказа.

5. Первый рабочий работал $12 : 3=4$ дня.

6. Первый выполнил $5 \cdot 4 = 20$ у.е. заказа.

7. Второй работал $9 - 4 = 5$ дней и выполнил 10 у.е. заказа.

8. 150 деталей составляют $20 - 10 = 10$ условных единиц.

9. Весь заказ составляет $150 : 10 \cdot 30 = 450$ деталей.

Ответ: было изготовлено 450 деталей.

Задача 6. Пятнадцать рабочих первой бригады могут построить дом за 18 дней, 20 рабочих второй бригады - за 12 дней, 30 рабочих третьей бригады могут построить такой же дом за столько дней, сколько потребуется для совместной работы 3 рабочих первой и 24 рабочих второй бригады. На постройку дома пригласили 12 рабочих первой бригады, 16 рабочих второй бригады и 15 рабочих третьей бригады, которые работали вместе. За работу они получили 2970 рублей. Сколько дней продолжалась постройка и сколько денег получил каждый?

Решение:

1. Будем считать, что при постройке дома выполняется работа в 2160 условных единиц.

2. Один рабочий первой бригады выполняет

$2160 : 18 : 15 = 8$ у.е. работы в день.

3. Один рабочий второй бригады выполняет

$2160 : 12 : 20 = 9$ у.е. работы в день.

4. Один рабочий третьей бригады выполняет

$(3 \cdot 8 + 9 \cdot 24) : 30 = 8$ у.е. в день.

5. Приглашенная бригада выполняет

$12 \cdot 8 + 16 \cdot 9 + 15 \cdot 8 = 360$ у.е. работы в день.

6. Приглашенная бригада построит дом за $2160 : 360 = 6$ дней.

7. Каждый рабочий первой бригады получит

$2970 : 18 : 15 \cdot 6 = 66$ рублей. Столько же получит каждый рабочий третьей бригады.

8. Каждый рабочий второй бригады получит

$2970 : 12 : 20 \cdot 6 = 74{,}25$ руб.

Ответ: Постройка продолжалась 6 дней, рабочие первой, второй и третьей бригады подучили соответственно 66; 74,25 и 66 рублей каждый

УПРАЖНЕНИЯ

1. Семь легких тракторов могут вспахать поле за 10 дней, а 4 гусеничных могли бы вспахать то же поле за 7 дней. За какое время 8 легких и 5 гусеничных тракторов могут вспахать другое поле, площадь которого относится к площади первого, как 41 : 14, если они будут работать вместе?

Ответ: За 10 дней.

2. Два насоса при одновременной работе могут выкачать воду из котлована за 12 часов. Производительность одного насоса в полтора раза меньше производительности второго. За сколько часов будет выкачана вся вода из котлована, если половицу воды выкачает первый насос, а оставшуюся воду - второй?

Ответ: За 25 часов.

3. Два пионерских отряда обязались собрать по одинаковому

количеству макулатуры. Первому отряду, собирающему в среднем по 24 кг в день, через несколько дней осталось собрать еще 30 кг. Второй отряд собирал в день по 28 кг и работал на 2 дня больше первого. Поэтому свое обязательство он перевыполнил на 46 кг. Сколько макулатуры обязался собрать каждый отряд?

Ответ: 150 кг

4. Для наполнения бассейна существуют два крана, первый наполняет бассейн за 4 часа 30 минут, а второй за 6 часов 45 минут. Сначала был открыт только первый кран на то время, в течение которого оба крана могли бы наполнить бассейн. После этого, не закрывая первый кран, открыли второй. Через сколько времени после открытия второго крана наполнится бассейн.

Ответ: Через 1,08 часа.

5. Некоторая работа была поручена двум рабочим. Первый рабочий может выполнить всю работу за 25 минут. После того, как первый рабочий отработал 8 минут 30 секунд, к работе приступил второй рабочий. После 11 минут совместной работы работа была полностью выполнена. За какое время один второй рабочий может выполнить всю работу?

Ответ: За 50 минут.

6. При одновременном действии двух труб бассейн наполняется за 8 часов. Обе трубы действовали в течение двух часов совместно, а затем первую трубу закрыли и тогда вторая труба закончила наполнение бассейна за 18 часов. За какое время, действуя отдельно, каждая труба может наполнить бассейн?

Ответ: За 12 и 24 часа, соответственно.

7. Для откачивания воды из шахты поставлены 3 насоса. Первый насос, действуя один, может выкачать всю воду за 12 часов, второй за 15 часов и третий - за 20 часов. Первые 3 часа действовали первый и третий насосы, а затем к ним присоединился второй. Сколько всего времени потребовалось для откачивания, воды из шахты?

Ответ: 6 часов.

8. В бассейн проведены три трубы. Через первые две трубы вода вливается, а через третью вытекает. Через одну первую трубу бассейн наполняется за 2 часа, через одну вторую за 5 часов, а через одну третью трубу вся вода из наполненного бассейна вытекает за 10 часов. За какое время бассейн наполнится, если открыть все три трубы?

Ответ: За 1 час 40 минут.

9. При совместном действии двух труб бассейн наполняется за 1 час 20 минут. Если же первую трубу открыть на 10 минут, а вторую на 12 минут, то наполнится только 2/15 бассейна. За сколько времени может наполнить бассейн каждая труба отдельно?

Ответ: За 2 и 4 часа, соответственно.

10. Два трактора различной мощности при совместной работе вспахали за 15 часов 1/6 часть всего поля. Если бы первый трактор работал 12 часов, а второй 20 часов, то они вспахали бы 1/5 часть всего поля. За какое время может вспахать все поле каждый трактор

отдельно?

Ответ: За 360 и 120 часов, соответственно.

11. Две бригады колхозников должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, а потому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За какое время могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?

Ответ: За 28 и 21 день, соответственно.

12. Двое рабочих должны сделать определенное число деталей. Если первый проработает 4 часа, а второй 3 часа, то они сделают половину всей работы. Если же первый будет работать 16 часов, а второй 6 часов, то они сделают в полтора раза больше деталей, чем было намечено. Во сколько времени может выполнить задание каждый рабочий отдельно?

Ответ: В 16 и 12 часов, соответственно.

13. В бассейн проведено 3 трубы. Первая и вторая вместе наполняют его за 1,2 часа, вторая и третья вместе - за 2 часа, а первая и третья вместе за 1,5 часа. За какое время каждая труба отдельно может наполнить бассейн? За какое время наполнится он, если открыть три трубы одновременно?

Ответ: За 2, 3, 6,1 час, соответственно.

14. Артель рыбаков должна была ежедневно вылавливать по 60 тонн рыбы. Однако артель, вылавливая ежедневно на 5 тонн сверх плана, не только выполнила план на 3 дня раньше срока, но и дала 120 тонн рыбы сверх плана. Сколько тонн рыбы должна была дать артель по плану?

Ответ: 3780 тонн.

15. На опытном участке было засеяно 432 га земли, причем рожью было засеяно в 3 раза больше, чем пшеницей и овсом вместе. Пшеницей было засеяно на 40 га больше, чем овсом.
Сколько гектаров земли было засеяно рожью, пшеницей и овсом в отдельности?

Ответ: 324, 74 и 34 га соответственно.

ГЛАВА 2. Задачи на составление линейных уравнений

Этот способ решения текстовых задач принципиально отличается от арифметического способа, рассмотренного в предыдущей главе. Решая задачу арифметическим способом, мы внимательно изучаем рассматриваемый в ней процесс и, выделяя отдельные качественные особенности его, шаг за шагом продвигаемся к ответу на вопрос задачи.

Составляя уравнения, мы фактически строим некоторую математическую модель, которая описывает основные свойства изучаемого нами реального процесса с достаточной степенью точности. Для нахождения ответа на вопрос задачи мы просто решаем соответствующие уравнения и неравенства. Легко понять, что соответствие между реальным процессом и его математической моделью не является взаимно однозначным. Именно поэтому не все решения соответствующих уравнений являются решением задачи. С другой стороны, решая конкретную задачу, мы можем построить несколько различных математических моделей ей соответствующих. Чем больше неизвестных мы используем для составления уравнений, тем проще получить математическую модель и тем формальнее является подход к решению задачи. Однако, при этом теряется гибкость и красота наших рассуждений. Поэтому, для каждой задачи желательно найти несколько различных решений. В большинстве задач самым красивым и содержательным является решение найденное арифметическим способом.

Основные этапы решения задач на составление уравнений:

1. Составление схемы.

Прочитав условие задачи, необходимо нарисовать схему, поясняющую процесс, изучаемый в задаче. Это облегчит понимание задачи.

2. Выбор неизвестных.

Выбирают некоторые неизвестные величины, независимые друг от друга, и обозначают их буквами латинского алфавита. Обычно выбирают те неизвестные, которые требуется найти по условию задачи. Но иногда удобнее выбрать некоторые другие неизвестные, так как удачный выбор неизвестных может существенно упростить составление уравнений.

3. Составление уравнений.

Все неизвестные величины выражают, в соответствии с условием задачи, через выбранные и обозначенные буквами латинского алфавита. Выражения записывают по строкам, подробно объясняя ход мысли и обращая внимание на размерность. При выработке достаточного навыка вместо подробной записи по строкам можно составлять таблицы и блок-схемы.

4. Решение уравнений.

5. Проверка,

Полученные корни уравнений обязательно проверяют по условию задачи. Проверка по условию необходима по двум причинам. Во-первых, корень уравнения может не быть решением задачи (дробное число рабочих, отрицательное время, отрицательная производительность труда и т.п.) Во-вторых, само уравнение может быть составлено неверно, найти ошибку можно только проверкой по условию задачи.

6. Исследование.

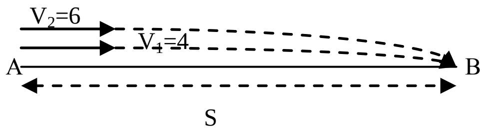
Если задача содержит буквенные параметры, то в зависимости от конкретных значений этих параметров, решений может быть много, решение может быть одно и, вообще, задача может не иметь решений. Необходимо выяснить при всех значениях параметров какое количество решений имеет задача. Даже если задача содержит только числовые данные, всегда полезно поразмышлять о соответствии процесса, изучаемого в задаче, реальной жизни и о том, что получится, если изменить эти данные. Если при решении уравнений получается корень, не удовлетворяющий условию задачи, то нужно попытаться понять, что означает такое решение и почему оно получилось.

7. Записать ответ на поставленный в задаче вопрос

2.1. Задачи на движение.

Задача 1. Из деревни в город вышли два пешехода. Первый, выйдя часом раньше второго, пришел в город часом позже его. Скорость первого пешехода 4 км в час, скорость второго 6 км в час. Определить расстояние между деревней и городом.

Решение:

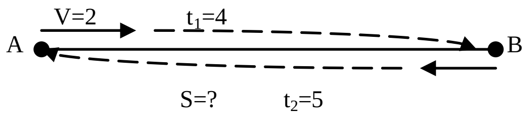


1. Пусть S км - расстояние между деревней и городом.
2. S/4 часов - время движения первого пешехода.
3. S/6 часов - время движения второго пешехода.
4. По условий задачи, второй пешеход был в пути на 2 часа меньше, чем первый, т.е. $S/4 - S/6 = 2$

Решая уравнение, находим S= 24 км. Проверка по условию показывает правильность найденного решения.

Ответ: Расстояние между городом и деревней 24 км.

Задача 2. Пароход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 4 часа, а против течения за 5 часов. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки равна 2 км/час.



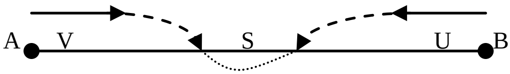
1. Пусть S км - расстояние между пристанями.
2. S/4 км/час — скорость парохода по течению.
3. S/5 км/час - скорость парохода против течения.
4. Так как скорость течения реки равна 2 км/час, то скорость парохода по течению на 4 км/час больше скорости парохода против течения $S/4 - S/5 = 4$

Решая уравнение, находим S = 80 км.

Ответ: Расстояние между пристанями равно 80 км.

Задача 3. Из города A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Первый поезд проходил в час V км, а второй U км. Через t часов, но еще до их встречи, расстояние между поездами было равно S км. Определить длину железной дороги между городами A и B.

Решение:



1. Пусть X км - расстояние между A и B.
2. $t \cdot V$ км прошел первый поезд за t часов.
3. $t \cdot U$ км прошел второй поезд за t часов.
4. По условию задачи им осталось пройти до встречи S км, т.е.

$X = t{\cdot}V + t{\cdot}U + S = t{\cdot}(V+U) + S$

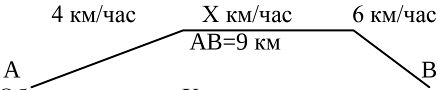
Очевидно, при любых значениях параметров задача имеет

единственное решение.

Ответ: Расстояние между городами A и B равно $t{\cdot}(V + U) + S$

Задача 4. Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из A в B идет сначала в гору, потом по ровное месту, а затем под гору. На каком протяжении дорога тянется но ровному месту, если скорость туриста составляет: в гору 4 км/час, по ровному маету 5 км/час, под гору 6 км/час, а расстояние между A и B по указанной дороге равно 9 км ?

Решение:



1. Обозначим через X км - расстояние по ровному месту, через Y км - сумму расстояний под гору и в гору.

2. По условию задачи $X + Y = 9$.

3. Время, затраченное на движение по ровному месту, равно $2X/5$ часов, а время, затраченное на движение под гору и в гору при движении туда и обратно, составит $Y/6 + Y/4 = 10Y/24 = 5Y/12$ часов.

4. По условию задачи, общее время движения равно
3 часа 31 минута или $221/60$ часа.

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

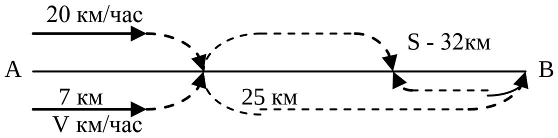
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{5y}{12} = \dfrac{221}{60} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 9 \\ 24x + 25y = 221 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим X=4, Y=5.

Ответ: Длина ровного участка дороги 4 км.

Задача 5. Велосипедист выехал из A в B и ехал с постоянной скоростью 20 км/час. Когда он проехал 1 км, его нагнал автомобиль, выехавший на 15 минут позже из A и шедший тоже с постоянной скоростью. После того, как велосипедист проехал еще 25 км, он встретил автомобиль, уже возвращавшийся из B, где он простоял полчаса. Чему равно расстояние между A и B?

Решение:



1. Обозначим расстояние от A до B через S км, а скорость движения автомобиля через V км/час.

2. Первый отрезок пути, равный 7 км, велосипедист проехал за 7/20 часа, а автомобилист за 7/V часа, при этом он выехал на четверть часа позже. Поэтому, 7/V +1/4 = 7/20.

3. Второй отрезок пути, равный 25 км велосипедист проехал за 5/4 часа.

4. За это время автомобилист проехал путь, равный 25 + 2(S - 32) = 2S - 39 км, при этом он стоял в пункте B полчаса. Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений:

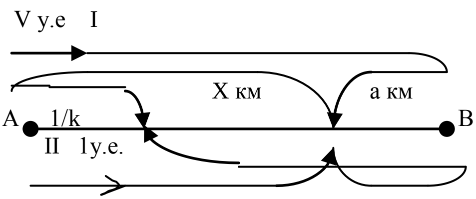
$$\begin{cases} \frac{7}{V} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20} \\ \frac{1}{2} + \frac{2S - 39}{V} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Решая систему, находим V = 70 км/час, S = 45,75 км.

Ответ: 70 км/час; 45,75 км.

Задача 6. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сразу поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути, на расстоянии a км от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно в B, он встречает второго велосипедиста, пройдя 1/k часть расстояния от A до B. Чему равно расстояние между A и B?

Решение:



1. Будем считать, что скорость движения второго велосипедиста равна одной условной единице. Через V условных единиц обозначим скорость первого велосипедиста, а через X км обозначим расстояние между A и B.

2. До первой встречи второй велосипедист проехал X - a км со скоростью, равной одной условной единице. За это время первый велосипедист проехал расстояние X+a км со скоростью V условных единиц. Поэтому, (X+a)/V = x - a или X+a = V (X-a)

3. От начала движения до второй встречи второй велосипедист проехал 2X - X/k =X/k · (2k - 1) км, а первый
2X + X/k =X/k · (2k + 1) км.
Поэтому, X/k· (2k+1)·V = X/k · (2k - 1) или 2k+1 =V· (2k-1)
В результате получается следующая система уравнений:

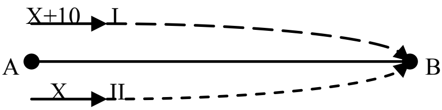
$$\begin{cases} X + a = V(X - a) \\ 2k + 1 = V(2k - 1) \end{cases}$$

Решив эту систему, находим X = 2ak км, V=(2k+1)/(2k-1) у.е.
Задача имеет единственное решение при любых положительных значениях параметров и k>1/2.

Ответ: Расстояние между A и B равно 2ak км

Задача 7. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/час больше скорости второго, и поэтому, первый автомобиль приезжает на место на 1 час раньше второго. Определить скорости автомобилей, если известно, что расстояние между городами 560км.

Решение:



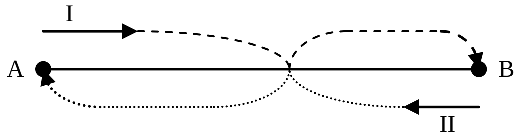
1. Пусть X км/час - скорость второго автомобиля.
2. (X + 10) км/час - скорость первого автомобиля.
3. 560 / X часов - время движения второго автомобиля.
4. 560/(X + 10) часов время, движения первого автомобиля.
5. По условию задачи , первый автомобиль находился в пути на 1 час меньше, чем второй, т.е. 560/X-560/(X+10) = 1

Отсюда, $X^2 + 10X - 5600 = 0$. Поэтому, X = 70 или X = -80.
Отрицательный корень не подходит, так как скорость считается положительной.

Ответ: Скорость второго автомобиля 70 км/час, скорость первого 80 км/час.

Задача 8. Два автомобиля вышли одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час автомобили встретились и, не останавливаясь, продолжали свой путь с той же скоростью. Первый прибыл в B на 27 минут позже, чем второй прибыл в A. Определить скорость каждого автомобиля, если расстояние между городами 90 км.

Решение:



1. Пусть X км/час - скорость первого автомобиля.

2. Так как за один час автомобили проехали вместе 90 км, то скорость второго (90 - X) км/час.

3. 90/X часов время, затраченное первым на весь путь.

4. 90/(90 - X) часов - время, затраченное вторым на весь путь.

По условию задачи, второй затратил на 27 минут, т.е. 9/20 часа меньше.

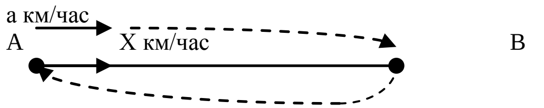
$90/X - 90/(90-X) = 9/20$ или $X^2 - 490X + 18000 = 0$.

Отсюда, X = 40 или X = 450. Второе значение не подходит, так как скорость второго автомобиля в этом случае будет отрицательной.

Ответ: Скорость первого автомобиля 40 км/час, второго 50 км/час.

Задача 9. Моторная лодка, развивающая скорость а км/час, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за m часов. Расстояние между пунктами равно S км. Найти скорость течения реки.

Решение:



1. Пусть X км/час - скорость течения реки.

2. S/(a + X) часов - время движения лодки по течению.

3. S/(a - X) часов - время движения лодки против течения.

По условию задачи, общее время движения равно m часов, т.е. $S/(a+X) + S/(a-X) = m$ или $X^2 = a^2 - 2aS/m$.

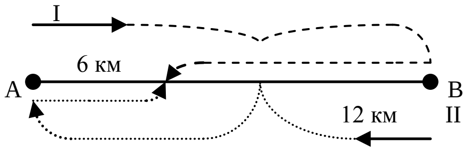
Отсюда, $X = \pm\sqrt{a^2 - \frac{2aS}{m}}$

Задача имеет единственное решение при $m>0$, $am \geq 2S$.

Ответ: Скорость течения реки равна $\sqrt{a^2 - \frac{2aS}{m}}$

Задача 10. Два туриста вышли одновременно навстречу друг: другу из A и B. Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, немедленно поворачивал обратно. Первый раз они встретились в 12 км от B, второй раз в 6 км от A через 6 часов после первой встречи. Найти расстояние от A до B и скорости обоих туристов.

Решение:



1. Пусть X км/час - скорость первого туриста, У км/час скорость второго и S км - расстояние от А до В.

2. До первой встречи второй турист прошел 12 км и затратил на этот путь 12/У часов.

3. До первой встречи первый турист прошел (S - 12) км и затратил на этот путь (S- I2)/X часов.

4. Так как до первой встречи оба туриста или одинаковое время, то (S-12)/X = 12/У

5. От первой до второй встречи первый турист прошел 12 +S- 6=S+6 км, затратив на этот путь 6 часов, т.е. S + 6 = 6X.

6. От первой до второй встречи второй турист прошел S - 12 +6 = S - 6 км, затратив также 6 часов, т.е. S-6=6У

В результате мы получим следующую систему уравнений:

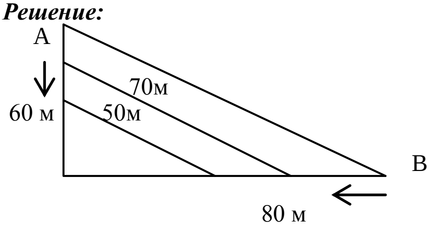
$$\begin{cases} S+6=6X \\ S-6=6Y \\ \dfrac{S-12}{X}=\dfrac{12}{Y} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X=\dfrac{1}{6}(S+6) \\ Y=\dfrac{1}{6}(S-6) \\ S^2-30S=0 \end{cases}$$

Так как S не может равняться нулю, то отсюда получаем S= 30, X= 6, У = 4.

Ответ: расстояние от А до В равно 30 км, скорость первого туриста равна 6 км/час и скорость второго туриста равна 4 км/час.

Задача 11. По двум сторонам прямого угла по направлению к его вершине движутся равномерно два тела. В некоторый момент времени тело А отстояло от вершины угла на расстоянии 60 метров, а тело В на расстоянии 80 метров. Через 3 секунды расстояние между А и В стало равным 70 метрам, а через 2 следующие секунды расстояние уменьшилось еще на 20 метров. Найти скорость каждого тела.

Решение:



1. Пусть X метров в секунду - скорость тела А, а У метров в

секунду - скорость тела В.

2. Через 3 секунды расстояние тела А от вершины стало равным (60 - 3Х) метрам, расстояние тела В (80 - 3У) метрам.

3. Расстояние от тела А до тела В через 3 секунды 70 метров, т.е. $(60-3X)^2 + (80-3У)^2 = 4900$

4. Еще через 2 секунды расстояние тела А до вершины равно (60 - 5Х) метров, а расстояние тела В (80 - 5У) метров.

5. В этот момент времени расстояние между телами А и В равно 50 метров, т.е. $(60-5X)^2 + (80-5У)^2 = 2500$

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(60-3X)^2+(80-3Y)^2=4900\\(60-5X)^2+(80-5Y)^2=2500\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}3X^2+3Y^2-120X-160Y+1700=0\\X^2+Y^2-24X-32Y+300=0\end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3 и вычтя почленно из первого, получим в результате приведения подобных 3Х + 4У = 50.

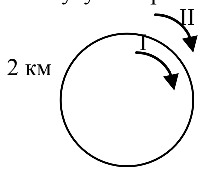
Выразив отсюда Х , подставив его во второе уравнение и приведя подобные, получим квадратное уравнение относительно У:

$У^2-16У + 64 = 0$. Уравнение имеет единственный корень У = 8. Соответственно, Х = 6.

Ответ: Скорость первого тела 6 м/сек, второго 8 м/сек.

Задача 12. По круговой дорожке длиной 2 км в одном направлении движутся два конькобежца, которые сходятся каждые 20 минут. Чему равна скорость каждого конькобежца, если первый из них пробегает окружность на 1 минуту быстрее второго?

Решение:



1. Пусть Х км/час скорость первого конькобежца, У км/час скорость второго конькобежца.

2. 2/Х часов - время прохождения первым конькобежцем полного круга, 2/У часов - время прохождения вторым конькобежцем полного круга.

3. Первый проходит круг на 1 минуту или 1/60 часа быстрее второго 2/У - 2/Х = 1/60.

4. Первый конькобежец сможет догнать второго, только пройдя лишний круг за 20 минут или 1/3 часа. Поэтому,

Х/3 = У/3 + 2

В итоге мы получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{Y}-\dfrac{2}{X}=\dfrac{1}{60}\\[2mm]\dfrac{X}{3}-\dfrac{Y}{3}=2\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}120X-120Y=XY\\X=Y+6\end{cases}$$

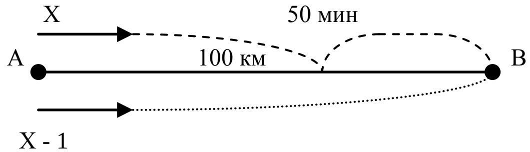
Подставив X из второго уравнения в первое, получим квадратное уравнение

$У^2 + 6У - 720 = 0$. Это уравнение имеет два корня У = 24 и У = -30. Второй корень не подходит, так меняется смысл задачи. Первому корню соответствует X=30.

Ответ: Скорость первого конькобежца равна 30 км/час, второго 24 км/час.

Задача 13. Расстояние между городами А и В равно 100 км. Из города А в город В направляются одновременно два автомобиля. Первый имеет скорость на 10 км/час большую, чем второй, но в пути делает остановку на 50 минут. В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля, при условии, что он прибывает в город В не позднее второго автомобиля?

Решение:



1. Пусть X км/час - скорость первого автомобиля.

2. 100/X часов - время, затраченное первым автомобилем на преодоление пути в 100км. Общее время, затраченное первым автомобилем, равно 100/X + 5/6 часов.

3. Скорость второго автомобиля (X - 10) км/час.

4. 100/(X - 10) часов - время, затраченное вторым автомобилем на весь путь. По условию задачи, время, затраченное первым автомобилем, должно быть не больше времени, затраченного вторым автомобилем, т.е.

$$100/(X - 10) \geq 100/X + 5/6$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

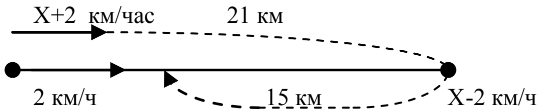
$$(X-40)(X-30)/(X-10)/X \leq 0$$

Используя метод интервалов, находим, что $10 < X \leq 40$.

Ответ: Скорость первого автомобиля должна быть больше 10 км/час и не более 40 км/час.

Задача 14. Лодка спускается по течению реки на 21 км, а затем поднимается против течения реки на расстояние 15 км. Скорость течения реки равна 2 км/час. Какова должна быть скорость лодки, чтобы вся поездка продолжалась не более восьми часов?

Решение:



1. Пусть X км/час - собственная скорость лодки.

2. (X + 2) км/час - скорость лодки по течению реки.

3. 21/(X + 2) часов - время движения лодки по течению реки.

4. (X - 2) км/час - скорость движения лодки против течения реки.

5. 15/(X -2) часов - время движения лодки против течения реки. По условию задачи, общее время движения лодки должно быть не более 8 часов, т.е. $21/(X + 2) + 15/(X -2) \geq 8$

Отсюда, $(2X+1)(X-5)/(X+2)/(X-2) \geq 0$

Поэтому, используя метод интервалов, получаем, $X \geq 5$.

Ответ: Скорость лодки должна быть не менее 5 км/час.

Задача 15. В каких пределах изменяется скорость точки, движущейся равномерно по прямой, если известно, что при увеличении скорости на 3 м/сек, эта точка, при прохождении расстояния в 630 метров, выигрывает время не меньше, чем 1 секунда м не больше, чем 280 секунд?

Решение:

1. Пусть X м/сек - скорость точки.

2. 630/X сек - время движения точки.

3. (X + 3) м/сек - увеличенная скорость точки.

4. 630/(X + 3) сек - новое время движения точки.

5. 630/ X - 630 /(X + 3) сек - выигрыш во времени. По условию задачи, выигрыш во времени составляет от 1секунды до 280 секунд, т.е. $1 \leq 630/X - 630/(X+3) \leq 280$. После преобразований, получим систему:

$$\begin{cases} X^2 + 3X - 1890 \leq 0 \\ 4X^2 + 12X - 27 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (X + 45)(X - 42) \leq 0 \\ (2X - 3)(2X + 9) \geq 0 \end{cases}$$

Используя метод интервалов, получаем $1{,}5 \leq X \leq 42$

Ответ: Скорость точки не менее 1,5 м/сек и не более 42 м/сек

УПРАЖНЕНИЯ

1. Поезд проходит расстояние от города A до города B за 10 часов 40 минут. Если бы скорость поезда была на 10 км/час меньше, то он прибыл бы в B на 2 часа 8 минут позже. Определить расстояние между городами и скорость поезда.

Ответ: 640 км и 60 км/час.

2. Связной должен был доставить донесение из пункта A в пункт B и вернуться обратно. Весь путь туда и обратно он проехал за 14,5 часов, причем от A до B он проезжал по 30 км**,** а обратно по 28 км в час. Определить расстояние от A до B.

Ответ: 210 км.

3. Пешеход рассчитал, что, проходя по 3 км в час, он придет из деревни в город в назначенный срок. Однако, пройдя половину пути с намеченной скоростью, он задержался на 1 час, а потому должен был увеличить свою скорость на оставшейся части пути на 1 км в час. Определить расстояние между городом и деревней.

Ответ: 24 км.

4. Из одного и того же города, в одном и том же направлении с интервалом в 2 часа отправлены два поезда. Скорость первого поезда 30 км/час, скорость второго поезда 45 км/час. Через сколько часов второй поезд догонит первого?

Ответ: 6 часов.

5. Самолет летел со скоростью 180 км/час. Когда ему оставалось пролететь на 320 км меньше, чем он пролетел, он увеличил скорость до 250 км, час. Средняя скорость самолета на всем пути оказалась равной 200 км/час. Какое расстояние пролетел самолет?

Ответ: 720 км

6. От пристани вниз по течению реки отошел пароход и одновременно от нее же вдоль берега отправился пешеход. Пройдя 24 км, пароход повернул обратно и через некоторое время встретил пешехода на расстоянии 8 км от пристани. Какова собственная скорость парохода, если скорость пешехода и скорость течения реки равны 4 км/час?

Ответ: 20 км/час.

7. Пешеход идет со скоростью 5 км/час, останавливаясь на отдых через каждые 4 км. Продолжительность каждой остановки, кроме каждой четвертой, 10 минут, а четвертой - 1 час. Какое расстояние прошел пешеход, если, отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место к полудню?

Ответ: 30 км.

8. Из пункта В против течения реки с собственной скоростью 18 км/час вышел теплоход. Через некоторое время из пункта А, находящегося выше по течению реки, в пункт В вышел катер и встретил теплоход на середине пути АВ. Если бы катер вышел на два часа раньше, то он встретил бы теплоход на расстояний 40 км от В. С какой скоростью двигался катер, если расстояние между А и В 120 км, а скорость течения реки равна 3 км/час?

Ответ: 57 км/час.

9. Два лыжника проходят одно и то же расстояние. Первый из них, скорость которого на 2 км меньше скорости второго, находится в пути на 45 минут дольше, чем второй. Найти скорость каждого лыжника, если известно, что второй лыжник прошел весь путь за 3 часа.

Ответ: 8 км/час и 10 км/час.

10. Связной проехал некоторое расстояние со скоростью 8 км/час. Возвращался он другой дорогой, которая была длинней первой на 3 км. На обратном пути связной ехал со скорость 9 км/час и затратил времени на 1/8 часа больше, чем на проезд туда. Определить длину каждой дороги.

Ответ: 15км и 18 км.

11. Колхозник должен был прибыть в город в назначенный срок.

Пройдя 3 км за один час, он рассчитал, что опоздает на 20 минут, если будет продолжать путь с прежней скоростью, а потому увеличил скорость на 0,5 км в час и пришел в город на 40 минут раньше срока. Определить расстояние от колхоза до города.

Ответ: 24 км.

12. Скорый поезд выходит в 1 час дня из города А и направляется в город В. Скорость его движения 60 км/час. Через 15 минут вслед за ним из А отправляется пассажирский поезд, который идет со скоростью 40 км/час. Поезд, вышедший из В, направляется в А со скоростью 50 км/час и встречает скорый поезд после одного часа пути, а пассажирский через 20 минут после этого. В котором часу вышел поезд из В?

Ответ: В 1 час дня.

13. Дорога от А до В сперва поднимается в гору на протяжении 3 км, потом идет по ровному месту на протяжении 5 км и после этого спускается под гору до самого пункта В на протяжении 6 км. Посыльный, отправившись из А в В и пройдя полпути, обнаружил, что забыл взять пакет. Он тотчас повернул обратно и по прошествии 3 часов 36 минут после своего выхода из А снова вернулся в А. Взяв пакет, он прошел весь путь от А до В за 3 часа 27 минут и вернулся из В в А за 3 часа 51 минуту. С какой скоростью шел посыльный в гору, по ровному месту и под гору, если считать эти скорости постоянными?

Ответ: 3 км/час, 4 км/час и 5 км/час, соответственно.

14. Заяц находится от собаки на расстоянии 80 своих прыжков. В то время, как он делает 3 прыжка, собака успевает сделать только 2, но собака продвигается одним своим прыжком на столько же, на сколько заяц двумя. Сколько прыжков сделает заяц, пока собака его догонит?

Ответ: 240 прыжков.

15. Пароход прошел 100 км по течению реки и 64 против течения, затратив на это 9 часов. В другой раз этот же пароход за это время прошел 80 км по течению реки и 80 км против течения реки. Определить скорость парохода в стоячей воде и скорость течения реки.

Ответ: 18 км/час и 2 км/час.

16. Пароход, двигаясь по течению реки, прошел расстояние между двумя пристанями за t часов. Возвращаясь обратно, он прошел это расстояние, затратив на a часов больше. Определить скорость течения реки и скорость парохода в стоячей воде, если расстояние между пристанями равно *S* км.

Ответ: aS/2/t/ (a+t) км/час, S(a+2t)/2/t/ (a+t) км/час

17. Велосипедист прибыл из пункта А в пункт В в назначенное время, двигаясь с определенной скоростью. Если бы он увеличил эту скорость на 3 км в час, то прибыл бы на место на один час раньше срока, а если бы он проезжал в час на 2 км меньше, чем в действительности, то опоздал бы на один час. Определить расстояние между пунктами А и В, скорость велосипедиста и время его движения.

Ответ: 60 км, 12 км/час, 5 часов.

18. Почтовый поезд, скорость которого на 15 км/час больше скорости товарного, затрачивает на прохождение расстояния между городам А и В на 9 часов меньше товарного поезда, а скорый поезд, скорость которого на 10 км/чае больше скорости почтового поезда, тратит на путь между городами А и В на три часа меньше почтового. Определить расстояние между городами А и В и скорость каждого поезда.

Ответ: 600 км. 25 км/час, 40 км/чае, 50 км/час.

19. Два туриста идут навстречу друг другу из городов А и В, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет на 2 часа раньше второго, то они встретятся через 2,5 часа после выхода второго туриста. Если второй выйдет на 2 часа раньше первого, то встреча произойдет через 3 часа после выхода первого туриста. Сколько километров в час проходит каждый турист?

Ответ: 5 км/час и 3 км/час.

20. Велосипедист движется по пути АВ, состоящему из ровной части, подъемов и спусков. На ровной местности его скорость равна 12 км/чае, на подъемах 8 км/час, на спусках 15 км/час. На дорогу из А в В велосипедист тратит 5 часов, на дорогу из В в А
4 часа 39 минут. Зная, что ровная часть составляет 28 км, узнать общую длину подъемов и спусков в направлении от А к В.

Ответ: 16 и 10 км, соответственно.

21. Всадник и пешеход отправляются из одного и того же пункта А в пункт В. Всадник, прибыв в В на 50 минут раньше пешехода, возвращается тотчас же обратно в А и встречается с пешеходом на расстоянии 2 км от В. На весь путь от А до В и обратно всадник затратил 1 час 40 минут. Каково расстояние от А до В и скорость всадника и пешехода?

Ответ: 6 км; 7,2км/час и 3,6 км/час.

22. Из пункта А в пункт В выходят три пешехода со скоростями, соответственно равными 4 км/час, 5 км/час и 6 км/час. Второй пешеход вышел из А на 2 часа позже первого. Через сколько часов после выхода первого пешехода должен выйти третий пешеход, чтобы догнать первого одновременно со вторым?

Ответ: Через 3 часа 20 минут.

23. Река течет от пункта А к пункту В, расстояние между которыми 12 км. В 12 часов дня из В в А выезжает на лодке первый рыболов. Вслед за ним через 5 минут выезжает второй рыболов и догоняет первого на расстоянии 1 км от В. После того как второй рыболов доплыл до А и повернул обратно к В, он встретил первого в 2 км от А. Через 35 минут после того, как первый приплыл в А, второй приплыл в В. Найти время встречи рыболовов и скорость течения реки.

Ответ: 3 часа 20 минут, 2 км/час.

24. Пассажирский поезд, идя по железной дороге от А к С,

останавливается на 7 минут на промежуточной станции В. Через 2 минуты после отхода пассажирского поезда из В, он встречается с курьерским поездом, который вышел из С в тот момент, когда пассажирскому поезду осталось доехать до В 56 км. Курьерский поезд идет вдвое скорее пассажирского и совершает путь от С до В за полтора часа. Однако, если бы курьерский поезд, достигнув **А,** тотчас отошел бы в С, то прибыл бы туда на 3 минута позже пассажирского. Найти расстояние между пунктами и скорости поездов.

Ответ: АВ =63 км, ВС = 126 км; 42 км/час и 84 км/час.

25. Из пункта А в пункт В одновременно отправляются два пешехода. Дойдя до В, первый пешеход сразу повернул обратно и встретил второго в 180 метрах от В. Продолжая движение в А, первый пешеход пришел туда на 3 минуты раньше второго. Но если бы он, прийдя в А, сразу бы повернул обратно, то встретил бы второго, пройдя шестую часть всего пути между А и В. Зайти расстояние между А и В и время, в течение которого оно было пройдено пешеходами.

Ответ: 2160 метров, 8 минут 15 секунд и 9 минут 45 секунд.

26. Два встречных поезда - один пассажирский, идущий из А в В, другой скорый, идущий из В в А, были задержана на промежуточной станции С на 2 часа. Увеличив скорости обоих поездов на 25%, машинисты привели их**,** соответственно, в В с опозданием на 48 минут и в А с опозданием на 1 час 36 мин. Определить расстояние между станциями А и С и первоначальные скорости поездов, если расстояние АВ равно 360 км, и скорость скорого на 20 км/час больше скорости пассажирского.

Ответ: 120 км, 40 км/час и 60 км/час.

27. Автомобиль отправляется из города А в город В в 8 часов утра. В городе В он останавливаете на 3 часа и затем едет в город А. Мотоцикл выезжает из города В в 9 часов утра в город А и встречает автомобиль в точке, которая вдвое ближе к В, чем к А. Доехав до города А, мотоцикл немедленно отправляется в город В, куда и приезжает в то же время, когда автомобиль возвращается в город А. Определить время нахождения в пути автомобиля и мотоцикла и отношение и**х** скоростей.

Ответ: 11 часов, 10 часов. Скорости относятся как 5 : 4.

28. Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно отправились пешеход и велосипедист. После встречи пешеход продолжал свой путь в В, а велосипедист доехал до А и, повернув назад, тоже поехал в В. Пешеход, выйдя из А, Пришел в В на n часов позже велосипедиста. Сколько времени прошло до встречи, если известно, что скорость пешехода в k раз меньше скорости велосипедиста. При каком условии задача имеет решение?

Ответ: $kn(k^2-k-2)$, $k \circledast 2$.

29. Из пункта А отправили по течению реки плот. Через 5 часов

20 минут вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Сколько километров в час проходил плот, если моторная лодка шла быстрее его на 12 км в час?

Ответ: 3 км/час.

30. Из двух городов, расстояние между которыми 900 км, отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Определить скорость каждого поезда, если первый вышел на 1 час позже второго и со скоростью на 5 км/час большей, чем скорость второго.

Ответ: 50 км/час, 45 км/час.

31. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 24 км, отправлены в одно и тоже время два автомобиля навстречу друг другу. После их встречи автомобиль, вышедший из А, приходит в В через 16 минут, а другой автомобиль приходит в А через 4 минуты. Определить скорость каждого автомобиля.

Ответ: 60 км/час, 120 км/час.

32. Два туриста идут навстречу друг другу: один из пункта А, другой из В. Первый выходит из А на 6 часов позже, чем второй из В, и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в В через 8 часов, а второй в А через 9 часов. Определить расстояние от А до В и скорость каждого туриста.

Ответ: 84 км, 6 км/час, 4 км/час.

33. Паровоз, пройдя первый перегон в 24 км, был задержан на некоторое время, а потому следующий перегон проходил со скоростью, большей прежней на 4 км/час. Несмотря на то, что второй перегон был длиннее первого на 15 км, паровоз прошел его за время, только на 20 минут больше, чем потребовалось на прохождение первого перегона. Определить первоначальную скорость паровоза.

Ответ: 32 км/час или 9 км/час.

34. Поезд должен был пройти 75 км за определенное время, но был задержан на станции на 30 минут. Чтобы пройти весь путь в назначенное время, он увеличил скорость на 5 км/час. Найти первоначальную скорость поезда.

Ответ: 25 км/час.

35. Расстояние по реке от одной пристани до другой, равное 30 км, моторная лодка проходит туда и обратно за 6 часов, затрачивая из этого времени 30 минут на остановки в пути. Найти собственную скорость моторной лодки, если скорость течения равна 1 км/час.

Ответ: 11 км/час.

36. С аэродрома одновременно вылетают два самолета: один по направлению на юг со скоростью 192 км/час, а другой по направлению на восток со скоростью 256 км/час. Через сколько часов расстояние между самолетами будет равно 960 км.

Ответ: Через 3 часа.

37. Два туриста выходят одновременно из деревни в город, находящийся от них на расстоянии S километров. Первый турист проходит в час на один километр больше второго и приходит в город

на час раньше его. Определить скорость каждого туриста.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{4S+1}\pm 1}{2}$ км/час.

38. Расстояние между двумя станциями железной дороги равно d км. Скорый поезд проходит это расстояние на t часов, скорее, чем пассажирский. Определить скорость обоих поездов, если известно, что скорый поезд проходит в час на а км больше, чем пассажирский.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2t^2+4adt}\pm at}{2}$ км/час.

39. Расстояние между двумя аэродромами А и В равно d километров. Из А в В вылетает первый самолет, а через m часов навстречу ему из В вылетает второй самолет со скоростью, на b км/час большей первого. Встреча их произошла на середине пути. Определить скорость каждого самолета.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{b^2m^2+2bmd}\pm bm}{2}$ км/час.

40. На середине пути между станциями А и В поезд был задержан на t минут. Чтобы прийти в В по расписанию, пришлось увеличить скорость поезда на а км в час. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями А и В равно d километрам.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2t^2+120adt}-at}{2}$ км/час.

41. Турист должен прийти в назначенный срок в город В из города А, расстояние между которыми равно S километрам. Пройдя половину своего пути от А до В, турист подсчитал, что опоздает на 2 часа, если будет идти дальше с той же скоростью, а если он на половине всего пути отдохнет 1 час, а затем будет проходить на V км в час больше прежнего, то придет в город В в назначенный срок. Сколько километров в час проходил турист первоначально?

Ответ: $-\dfrac{V}{2}+\dfrac{1}{6}\sqrt{9V^2+6VS}$ км/час.

42. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В, расстояние между которыми d километров, и через час встречаются. Не останавливаясь, они продолжают путь с прежней скоростью. Первый прибывает в пункт В на t часов скорее, чем второй в пункт А. Определить скорость каждого велосипедиста.

Ответ:

$$\frac{1}{2t}(dt-2d+d\sqrt{t^2+4})\text{км/час}, \frac{1}{2t}(dt+2d-d\sqrt{t^2+4})\text{км/час}$$

43. При прохождении одного и того же расстояния в S километров,трехтонная машина расходует бензина на а литров больше полуторатонной. Сколько литров бензина расходует каждая автомашина на пробег этого расстояния, если полуторатонная машина при затрате одного литра бензина проходит на b метров больше

трехтонной?

Ответ: $\dfrac{-ab \pm \sqrt{a^2b^2 + 4000abS}}{2b}$ литров.

44. Чтобы проплыть по течению реки S метров, пловец должен затратить на t минут меньше, чем затратил бы, проплывая то же расстояние в стоячей воде. Какова скорость пловца в стоячей воде, если скорость течения реки V метров в час?

Ответ: $\dfrac{1}{120t}\left(-tV + \sqrt{t^2V^2 + 240StV}\right)$ м/мин.

45. Два поезда одновременно вышли из пунктов A и B навстречу друг другу. При встрече оказалось, что первый поезд прошел на a километров больше второго. Продолжая путь с той же скоростью, первый поезд пришел в B через m часов после встречи, а второй поезд пришел в A через n часов после встречи. Сколько километров каждый поезд прошел до встречи?

Ответ: $\dfrac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$ и $\dfrac{a\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$ км.

46. Расстояние между двумя городами, равное 480 км, пассажирский поезд проходит на 4 часа быстрее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 км/час, а скорость товарного увеличить на 2 км/час, то пассажирский поезд пройдет все расстояние на 5 часов быстрее товарного. Чему равна скорость каждого поезда?

Ответ: 40 км/час, 30 км/час.

47. Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на 6 км/час превосходящей скорость движения на подъеме, затрачивает путь от A до B 2 часа 40 минут, а на обратный путь на 20 минут меньше. Найти скорость велосипедиста на спуске и на подъеме, если длина всей дороги равна 36 километров.

Ответ: 18 км/час, 12 км/час.

48. Из A и B навстречу друг другу вышли два пешехода. Когда первый пешеход прошел половину пути, второму осталось пройти 24 километра. Когда второй прошел половицу пути, первому осталось пройти 15 километров. Сколько километров осталось пройти второму пешеходу после того, как первый, пешеход закончил переход?

Ответ: 8 км.

49. Пристань B находится на расстоянии 24 км от пристани A вниз по течению реки. От пристани A к пристани B одновременно отправились пароход и пешеход. Дойдя до B, пароход повернул обратно и через некоторое время встретил пешехода на расстоянии 8 км от A. Продолжая рейс, пароход прибыл в A через полтора часа после встречи с пешеходом. С какими скоростями двигались пешеход и пароход, если пешеход двигался со скоростью течения реки?

Ответ: 4 км/час, 20 км/час.

50. От станции A в направлении к станции B в 8 часов утра

вышел скорый поезд, а через час после этого товарный. Со станции В в 9 часов утра в направлении на станцию А вышел курьерский поезд, который в 10 часов утра того же дня встретился со скорым поездом, а в 11 часов утра того же дня - с товарным. Товарный поезд прибыл в В на 3 часа позже скорого. Когда курьерский поезд прибыл в А?

Ответ: В 12 часов.

51. Пешеход отправляется из пункта А в пункт В**,** расстояние между этими пунктами равно 13 км 200 метров. В то же время из пункта В в пункт А выезжает велосипедист. Встреча происходит через 44 минуты, после чего велосипедист прибывает в А на 1 час 45 минут быстрее, чем пешеход приходит в В. Какова скорость пешехода и велосипедиста?

Ответ: 80 метров в минуту и 220 метров в минуту.

52. Расстояние между городами равное 600 км, пассажирский поезд проходит на 8 часов быстрее товарного. Если скорость каждого увеличить на 10 км в час, то пассажирский поезд прибудет на конечную станцию лишь на 5 часов быстрее товарного. Определить скорость каждого поезда.

Ответ: 50 км/час, 30 км/час.

53. Из двух городов А и В, одновременно навстречу друг другу, вышли два пешехода. Когда они встретились, то оказалось, что первому пешеходу потребуется еще 4 часа 30 минут, чтобы дойти до города В, а второму потребуется 2 часа, чтобы дойти до города А. Определить скорость пешеходов, если расстояние. между городами А и В равно 30 км.

Ответ: 4 км/час и 6 км/час.

54. Два поезда отправляются одновременно из А и В навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 км/час больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 км от середины АВ. Если бы первый поезд отправился из А на 45 минут позже второго, то оба поезда встретились бы на середине АВ. Найти расстояние АВ и скорости обоих поездов.

Ответ: 840 км, 80 км/час, 70 км/час.

55. Велосипедист, выезжающий из А в В, должен приехать в В через 3 часа. Одновременно с ним из пункта С выезжает другой велосипедист и, чтобы успеть проехать в В вместе с первым, он должен каждый километр проезжать на 1 минуту быстрее первого. Расстояние от С до В на 6 км больше, чем расстояние от А до В. Определить эти расстояния.

Ответ: 30 км и 36 км.

56. Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и едут в одном и том же направлении. Одна машина едет со скоростью 50 км/час, другая со скоростью 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1 час 30 минут позже, чем вторую. Найти скорость третьей машина.

Ответ: 60 км/час.

57. По окружности длины S равномерно и в одном направлении

движутся две точки. Одна из них делает полный круг быстрее второй на t секунд. Чему равны скорости точек, если время между двумя последовательными сближениями этих точек равно T.

Ответ: $\frac{S}{2T}\left(\pm 1+\sqrt{1+\frac{4T}{t}}\right)$ км/час.

58. Турист прошел 105 километров. Если бы на это путешествие он затратил на 2 дня больше, то мог бы в день проходить на 6 км меньше. Сколько километров проходил турист в день?

Ответ: 21 км.

59. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из пункта А в пункт В, отстоящий от А на расстоянии 60 км. Затем он выезжает обратно с той же скоростью, но через один час после выезда делает остановку на 20 минут. После этого он продолжает движение, увеличив скорость на 4 км/час. В каких пределах заключена скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от В до А он потратил времени не более, чем на путь от А до В?

Ответ: Не более 20 км/час.

60. Пункт А стоит в поле на расстоянии 8 км от пороги. На дороге, которая является прямой линией, стоит пункт В. Скорость движения автомобиля по дороге в два раза больше, чем по полю. Известно, что если ехать из А в В так, что часть пути пройдет по дороге, то даже при самом удачном выборе пути движения на это уйдет не меньше времени, чем потребуется, если ехать напрямик по полю. В каких пределах может меняться расстояние от А до В?

Ответ: От 8 км до $\frac{16}{\sqrt{3}}$ » $9,24$ км.

61. Из пункта А в пункт С в 9 часов утра отправился скорый поезд. В это же время из пункта В, расположенного между пунктами А и С, выходят два пассажирских поезда, первый из которых следует в А, а второй в С. Скорости пассажирских поездов равны. Скорый поезд встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 часа после его отправления, потом проходит пункт В не ранее 14 часов того же дня и, наконец, прибывает в пункт С одновременно со вторым пассажирским, поездом через 12 часов после встречи с первым пассажирским поездом. В какое время прибывает в пункт А первый пассажирская поезд?

Ответ: В 16 часов 30 минут.

62. Расстояние между А и В равно 7 км. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу и встретились раньше, чем через 1 час. Если бы первый шел в два раза быстрее, чем он шел на самом деле, а скорость второго была бы на 2 км/час больше, чем та, с которой он шел, то к моменту встречи второй прошел бы большую часть пути. Скорость какого пешехода больше?

Ответ: Второго.

63. От пристани А вниз по реке отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/час.

Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить скорость течения реки, если известно, что, к моменту возвращения катера в А, плот проходит более 15 км.

Ответ: Скорость течения больше 5 км/час, но меньше 10 км/час.

64. Из города А в город В, находящийся на расстоянии 105 км от А, с постоянной скоростью движется автобус. Через 30 минут вслед за ним из А со скоростью 40км/час выезжает автомобиль, который, догнав автобус, поворачивает обратно и движется с той же скоростью. Определить скорость автобуса, если известно, что автомобиль возвращается в город А позже, чем автобус приходит в город В.

Ответ: Скорость автобуса больше 30 км/час, но не больше 33,6 км/час.

65. Пристани А и В расположены на реке так, что плот, плывущий из А в В со скоростью течения реки, проходит путь от А до В за 24 часа. Весь путь от А до В и обратно моторная лодка проходит не менее чем за 10 часов. Бели бы собственная скорость моторной лодки увеличилась на 40%, то тот же путь занял бы у лодки не более 7 часов. За какое время моторная лодка проходит путь из А в В в случае, когда ее собственная скорость не увеличена?

Ответ: За 4 часа.

2.2. Задачи на проценты и пропорции.

Задача 1. Морская вода содержит 5% по весу соли. Сколько кг пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 2% ?

Решение:

40 кг 5%	+	? пресная	=	2%

1. Обозначим через Х необходимое количество пресной воды в килограммах.
2. Общее количество смеси будет (Х + 40) кг.
3. Общее количество соли в смеси $40 \cdot 5 : 100 = 2$ кг.
4. По условию задачи содержание соли в смеси составляет 2%,

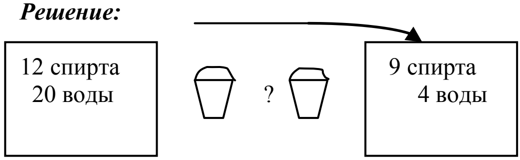
т.е. $2 : (X+40) = 2 : 100$

Решая уравнение, получаем $X = 60$ кг.

Ответ: Нужно добавить 60 кг пресной воды.

Задача 2. Одна бочка содержит 12 ведер спирта и 20 ведер воды, другая 9 ведер спирта и 4 ведра воды. Сколько ведер нужно перелить из первой бочки во вторую, чтобы получить в ней смесь, содержащую равный объем спирта и воды?

Решение:



1. Обозначим через X количество ведер, которое нужно перелить из первой бочки во вторую.

2. Количество перелитого при этом чистого спирта будет равно

$12 \cdot X : (12 + 20) = 3 \cdot X : 8$ ведер.

3. Общее количество спирта во второй бочке будет равно

$9 + 3 \cdot X/8$ ведер.

4. Количество воды, перелитой во вторую бочку, равно

$20 \cdot X : (12 + 32) = 5 \cdot X/8$ ведер.

5. Общее количество воды во второй бочке будет равно

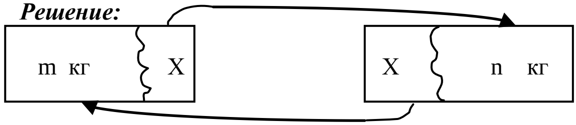
$4 + 5 \cdot X/8$ ведер.

6. По условию задачи, количество воды и спирта во второй бочке стало одинаковым, т.е. $9 + 3 \cdot X : 8 = 4 + 5 \cdot X:8 \cdot$ Отсюда $X = 20$.

Ответ: Из первой бочки во вторую нужно перелить 20 ведер.

Задача 3. От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m и n кг соответственно, отрезано по куску одинакового веса. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

Решение:



1. Предположим, что в каждом килограмме первого сплава содержится на одну условную единицу меди больше, чем в килограмме второго.

2. Обозначим через X кг вес каждого из отрезанных кусков.

3. Если кусок первого сплава оплавить с остатком другого, то количество меди в каждом килограмме второго сплава увеличится на X/n условных единиц.

4. Если отрезанный кусок второго сплава сплавить с остатком первого сплава, то количество меди в каждом килограмме первого сплава уменьшится на X/m условных единиц.

5. Согласно условию задачи, содержание меди в каждом килограмме полученных сплавов стало одинаковым. Это означает, что

первоначальная разница в 1 у.е. компенсировалась.

$X/n + X/m = 1$ Отсюда $X = m\,n : (m + n)$. Решение единственно при любых положительных m и n и не зависит от процентного содержания меди в каждом сплаве.

Ответ: вес каждого куска равен $m\,n : (m + n)$ кг.

Задача 4. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли.
Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

Решение:

1. Предположим, что книга стоила магазину 100 условных единиц.
2. Обозначим через X количество процентов прибыли, которое хотел получить магазин. Другими словами, магазин хотел продать книгу за $100 + X$ условных единиц.
3. Однако, ему пришлось снизить цену на 10%, т.е. продать книгу за $(100 + X) \cdot 0{,}9 = 90 + 0{,}9 \cdot X$ условных единиц.
4. По условию задачи магазин получил 8% прибыли, т.е. продал книгу за $100 + 8 = 108$ условных единиц.

Составим уравнение: $90 + 0{,}9X = 108$. Отсюда $X = 20$.

Ответ: Магазин предполагал получить 20% прибыли.

Задача 5. Один сплав содержит два металла в отношении m:n другой сплав содержит те же металлы в отношении p:q. Сколько кг первого сплава нужно добавить в S кг второго, чтобы количество металлов в новом сплаве относилось бы как a:b?

Решение:

I		II		III
p:q S кг	+	m:n X кг	=	a:b S+X кг

1. Обозначим через X - количество кг первого сплава, которое необходимо добавить ко второму сплаву.
2. Количество первого металла в первом сплаве равно
   $mx : (m + n)$ кг.
3. Количество первого металла во втором сплаве равно
   $ps : (p + q)$ кг.
4. Общее количество первого металла в новом сплаве равно
   $mx : (m + n) + ps : (p + q)$ кг.
5. Количество второго металла в первом сплаве равно
   $nx : (m + n)$ кг.
6. Количество второго металла во втором сплаве равно
   $qs : (p + q)$ кг.
7. Количество второго металла в новом сплаве равно
   $nx : (m + n) + qs : (p + q)$ кг.
8. По условию задачи, количества этих металлов

относятся как $a : b$. Поэтому ,

$$(nx : (m + n) + qs : (p + q)) \cdot a = (mx : (m + n) + ps : (p + q))$$

Решая это уравнение, находим

$$X = S \cdot (n + m) : (p + q) \cdot (pb - aq) : (a n - m b)$$

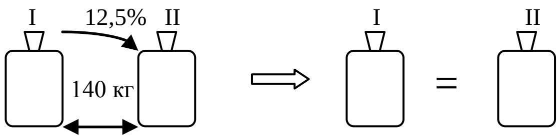
Если $a n - mb = 0$, $p b - a q \neq 0$, т.е. $a : b = m : n$, $a : b \neq p : q$, то это означает, что отношения металлов в первом сплаве и новом сплаве равны между собой и не равны отношению этих металлов во втором сплаве. Так как любая смесь первого и второго металлов в этом случае испортит отношение металлов, характерное для первого сплава, то задача решения не имеет.

Если $a\cdot n - m\cdot b = 0$ и $p\cdot b - a\cdot q = 0$, то это означает, что все сплавы имеют одинаковое отношение металлов и их можно смешивать в любых пропорциях. В этом случае задача имеет бесконечно много решений.

Ответ: $S \cdot (n + m) : (p + q) \cdot (p\cdot b - a\cdot q) : (a\cdot n - m\cdot b)$ кг,
если $a\cdot n - m\cdot b \neq 0$

Задача 6. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках будет поровну. Сколько килограмм муки в каждом мешке?

Решение:



1. Обозначим через X кг количество муки в первом мешке, а через Y кг количество муки во втором мешке.

2. Согласно условию задачи, $X + Y = 140$.

3. Из первого мешка взяли 12,5% т.е. восьмую часть муки. В результате этого в первом мешке осталось $X - X/8 = 7X/8$ кг муки.

4. Во втором мешке стало $Y + X/8$ кг муки.

5. По условию задачи, в обоих мешках стало муки поровну. Таким образом, $Y + X/8 = 7X/8$

В результате мы получили следующую систему уравнений

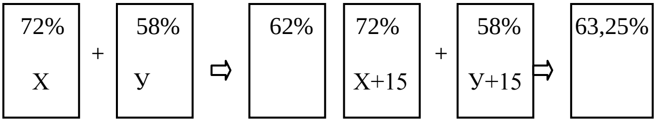
$$\begin{cases} X + Y = 140 \\ Y + \dfrac{X}{8} = \dfrac{7X}{8} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X + Y = 140 \\ 6X - 8Y = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим X = 80 кг**,** Y = 60 кг.

Ответ: В первом мешке 80 кг муки, а во втором 60 кг муки.

Задача 7. Одна железная руда содержит 72% железа, другая 58% железа. Некоторое количество первой руды смешивается с некоторым количеством второй руды и получается руда, содержащая 62% железа. Если бы для смеси взяли бы каждой руды на 15 кг больше, то получилась бы руда, содержащая 63,25% железа. Найти вес каждой руды, взятой для смеси.

Решение:



1. Обозначим через X и У количество первой и второй руды, взятых для смеси, в кг.

2. Чистого железа в первой руде содержится

$72X/100 = 18X/25$ кг.

3. Чистого железа во второй руде содержится

$58У/100 = 29У/50$ кг.

4. Значит, вес чистого железа в первой смеси

$18X/25 + 29У/50$ кг.

5. Общий вес первой смеси равен (X + У) кг.

6. По условию задачи первая смесь содержит 62% железа. Поэтому, $18X/25 + 29У/50 = 62(X + У)/100$

7. Вес чистого железа в первой руде для второй смеси равен $18(X + 15)/25$ кг.

8. Вес чистого железа во второй руде для второй смеси равен

$29(У + 15)/50$ кг.

9. Общий вес второй смеси равен (X + У + 30) кг.

10. По условию задачи, вторая смесь содержит 63,25% железа. Поэтому, $18(X + 15)/25 + 29(У + 15)/50 = 63{,}25(X + У + 30)/100$ кг. Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

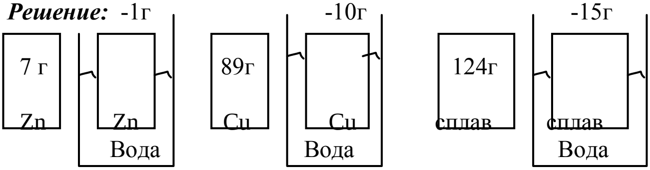
$$\begin{cases} 36X + 29У = 31(X + У) \\ 288(X + 15) + 232(У + 15) = 253(X + У + 30) \end{cases}$$

Решив систему, получим X = 12 кг, У = 30 кг.

Ответ: Вес первой руды 12 кг, вес второй руды 30 кг.

Задача 8. Латунь состоит из сплава меди и цинка. Кусок латуни весом 124 грамма при погружении в воду весит на пружинных весах на 15 г меньше. Другими словами, теряет 15 г. Сколько в нем содержится меди и цинка отдельно, если известно, что 89 г. меди теряют в воде 10 г, а 7 г цинка теряют 1 г?

Решение:



1. Пусть в куске латуни содержится Х г меди и У г цинка.
2. По условию задачи Х + У = 124.
3. Кусок меди весом Х г теряет в воде 10Х/89 г.
4. Кусок цинка весом У г теряет в воде У/7 г.
5. Так как кусок латуни при погружении в воду теряет 15 г, то
10Х/89 + У/7 = 15

Мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X + Y = 124 \\ \frac{10X}{89} + \frac{Y}{7} = 15 \end{cases}$$

Отсюда, Х =89 г и У = 35 г.

Ответ: В куске латуни содержится 89 грамм меди и 35 грамм цинка.

Задача 9. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того, как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

Решение:

1. Пусть Х - количество рядов в зрительном зале до перестановок.
2. Тогда 320/Х количество мест в каждом ряду.
3. Х + 1 - новое количество рядов в зрительном зале.
4. 320/Х + 4 - новое количество мест в каждом ряда.

По условию задачи в зрительном зале стало 420 мест, т.е.

(320/Х+4)(Х+1) = 420 или X^2-24Х+80 = 0

Отсюда, Х = 4 или Х = 20.

Ответ: В зрительном зале стало 5 рядов по 84 места в каждом или 21 ряд по 20 мест в каждом ряду.

Задача 10. Цена ткани были снижена на столько процентов, сколько рублей стоил метр ткани до снижения цен. На сколько процентов была снижена цена на ткань, если метр этой ткани стали продавать по 16 рублей?

Решение:

1. Пусть Х рублей стоил метр ткани до снижения цен.
2. Так как цену снизили на Х%, то метр ткани после снижения цен стал стоить Х(1 - Х/100) рублей.

По условию задачи, метр ткани стал стоить 16 руб., т.е.

Х(1-Х/100) = 16 или X^2 - 100Х + 1600 = 0

Отсюда, Х = 80 или Х = 20.

Ответ: Цена на ткань была снижена на 20% или на 80%.

Задача 11. Население города увеличилось за два года 1 20000 человек до 22050 человек. Найти средний ежегодный процент прироста населения этого города.

Решение:

1. Пусть Х% - ежегодный прирост населения в данном городе.

2. $20000(1 + X/100)$ человек стало в городе через год.

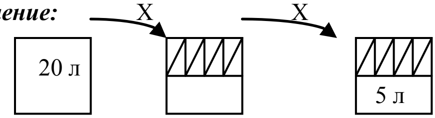
3. $20000(1 + X/100)(1 + X/100) = 20000(1 + X/100)^2$ человек стало в городе через два года.

По условию задачи, через два года в городе стало 22050 человек, т.е.
$20000(1 + X/100)^2 = 22050$ или $(1+X/100)^2 = 441/400$
Отсюда, Х с 5 или $X = -205$. Второе значение не подходит по условию задачи.

Ответ: Средний ежегодный процент прироста населения города составляет 5%.

Задача 12. Из сосуда, вмещающего 20 литров и наполненного спиртом, отлили некоторое количество спирта и долили сосуд водой. Затем отлили такое же количество смеси и снова долили водой. После этого в сосуде осталось 5 литров чистого спирта. По сколько литров жидкости отливали каждый раз?

Решение:



1. Пусть Х литров жидкости отливали каждый раз.

2. 20-Х литров спирта осталось в сосуде в первый раз. Поэтому в каждом литре смеси содержится $(20— X)/20$ литров спирта.

3. $X(20 - X)/20$ литров спирта отлили во второй раз.

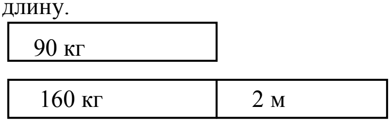
4. $X + X(20 - X)/20$ литров спирта отлили за два раза.

По условию задачи, за два раза отлили 15 литров спирта, т.е.
$$X + X(20 - X)/20 = 15 \quad \text{или} \quad X^2-40X +300 = 0.$$
Отсюда, $X = 10$ или $X = 30$. Второе значение не подходит по условию задачи.

Ответ: Из сосуда отливали по 10 литров жидкости каждый раз.

Задача 13. Деревянная балка весит 90 кг, а железная балка, длина которой на два метра больше деревянной, весит 160 килограмм. Вес одного погонного метра железной балки на 5 килограммов больше погонного метра деревянной балки. Найти вес одного погонного метра каждой балки и их длину.

Решение:



1. Пусть Х кг — вес одного погонного метра деревянной балки, а У кг - вес одного погонного метра железной балки.

2. Вес одного погонного метра железной балки на 5 кг больше веса одного погонного метра деревянной балки,
т.е. $У - X = 5$.

3. 90/Х метров - длина деревянной балки.

4. 160/У метров - длина железной балки.

5. Железная балка длиннее деревянной на 2 метра, т.е.

90/Х = 160/У - 2

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{90}{X} = \dfrac{160}{Y} - 2 \\ X = Y - 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 45Y - 80X + 2XY = 0 \\ X = Y - 5 \end{cases}$$

Подставив Х из второго уравнения в первое, получим квадратное уравнение относительно У: $У^2 - 40У + 400 = 0$.

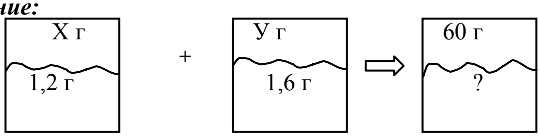
Уравнение имеет единственный корень У= 20.

Тогда Х = 15. Длина деревянной балки равна 90 : 15 = 6 метров, а железной 160 : 20 = 8 метров.

Ответ: Вес одного погонного метра деревянной балки 15 кг**,** а длина 6 метров. Вес погонного метра железной балки 20 кг, длина 8 метров.

Задача 14. Из двух жидкостей, удельные веса которых соответственно равны 1,2 и 1,6 грамма на сантиметр кубический, составлена смесь весом 60 грамм. Сколько граммов каждой жидко взято и каков удельный вес смеси, если 8 кубических сантиметров ее весят столько же, сколько весит все количество менее тяжелой из смешанных жидкостей?

Решение:



1. Пусть Х грамм - количество первой жидкости, У грамм - количество второй жидкости.

2. Смесь весит 60 грамм, поэтому Х + У = 60.

3. Х/1,2 = 5Х/6 кубических сантиметров - объем первой жидкости.

4. У/1,6 = 5У/8 кубических сантиметров - объем второй жидкости.

5. 5Х/6 + 5У/8 кубических сантиметров - объем смеси.

6. 60/(5Х/6 + 5У/81) грамм на сантиметр кубический - удельный вес смеси.

7. Вся наиболее легкая жидкость весит столько же, сколько весят 8 кубических сантиметров смеси, т.е. 60/(5Х/6 + 5У/81) = Х/8.

В результате получилась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{60}{\dfrac{5X}{6} + \dfrac{5Y}{8}} = \dfrac{X}{8} \\ X + Y = 60 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X(4X + 3Y) = 2304 \\ Y = 60 - X \end{cases}$$

Подставив У из второго, уравнения в первое, получим:

$X^2 + 180X - 2304 = 0$ Отсюда, Х = 12 или Х = -201. Подходит только первое значение.

Соответственно, У = 48 и удельный вес смеси равен
60 : (5 · 12:6 + 5·48 : 8) = 1,5

Ответ: Взято 12 грамм первой жидкости и 48 грамм второй. Удельный вес смеси равен 1,5 грамма на сантиметр кубический.

Задача 15. Ценности двух сплавов металлов А и В при равных весах сплавов относятся как 11 : 17. Если, не меняя в сплавах количества металла А, удвоить количество металла В в каждом сплаве, то ценности их при равных весах будут относиться как 7 : 11. Предполагая, что металл В в 13 раз дороже металла А, определить отношение веса металла А к весу металла В в каждом сплаве.

Решение: I II I II

$\boxed{X:1} : \boxed{У:1} = 11:17 \quad \boxed{X:2} : \boxed{У:2} = 7:11$

1. Пусть отношение веса первого металла к весу второго металла в первом сплаве равно Х, а во втором У.

2. Один грамм первого сплава содержит Х/(Х + 1) грамм первого металла и 1/(Х + 1) грамм второго металла.

3. Примем ценность металла А за 1, тогда ценность металла В будет равна 13 единицам. Поэтому ценность первого сплава составит Х/(Х + 1) + 13/(Х+1) = (Х+13)/(Х+1) единиц.

4. Аналогично, ценность второго сплава составит У/(У+1) + 13/(У+1) = (У+13)/(У+1) единиц.

5. Если удвоить количество металла В в сплавах, то отношение весов первого и второго металлов в первом сплаве будет равно Х : 2, г во втором У : 2.

6. Один грамм первого сплава содержит в этом случае Х/(Х + 2) грамм первого металла и 2/(Х + 2) грамм второго металла.

7. Ценность нового первого сплава будет равна (Х + 26)/(Х + 2) единиц.

8. Ценность нового второго сплава равна (У + 26)/(У + 2) единиц. Поэтому, 11 (Х + 26)/(Х + 2) = 7 (У + 26)/(У + 2)

В результате мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 17\dfrac{X+13}{X+1} = 11\dfrac{Y+13}{Y+1} \\ 11\dfrac{X+26}{X+2} = 7\dfrac{Y+26}{Y+2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} XY + 35Y - 21X + 13 = 0 \\ XY + 68Y - 40X + 52 = 0 \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое, получим 19Х = 33У + 39

Х =(33У+39)/19 . Подставив Х в первое уравнение и**,** приведя подобные, мы получим квадратное уравнение относительно У.

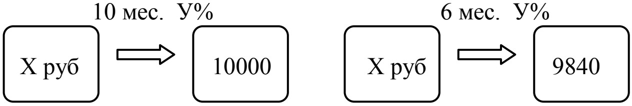
$3У^2 + У - 52 = 0$

Отсюда **У** = 4 или У =-13/3. Второе значение не подходит. Соответственно, Х = 9.

Ответ: Отношение веса металла А к весу металла В в первом сплаве равно 9**,** а во втором 4.

Задача 16. Два вкладчика положили в сберкассу одинаковые суммы. Первый из них взял вклад по истечении 10 месяцев и получил 10000 рублей, второй взял вклад по истечении 6 месяцев и получил 9840 рублей. Сколько рублей положил в сберкассу каждый из них и сколько процентов выплачивает сберкасса?

Решение:



1. Пусть Х рублей сумма вкладов, а У% выплачивает сберкасса в год.

2. С суммы Х рублей за 10 месяцев первый вкладчик получит Х (10/12) (У/100) = ХУ/120 рублей дохода. В результате общая сумма, полученная первым вкладчиком, составит Х (1+У/120) рублей.

3. По условию задачи эта сумма равна 10000, т.е.

Х (1+У/120) = 10000

4. Аналогично, второй вкладчик получит через 6 месяцев

Х (1+У/200) рублей.

5. По условию задачи эта сумма поставит 9840 рублей, т.е.

Х (1+У/200) = 9840

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X(1+\frac{Y}{120}) = 10000 \\ X(1+\frac{Y}{200}) = 9840 \end{cases}$$

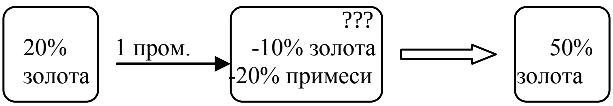
Поделив первое уравнение на второе, получим

(1+У/120)/(1+У/200)=1000/9840 или У = 5. Соответственно, Х=9600.

Ответ: Первоначальная сумма вклада составляет 9600 руб, сберкасса выплачивает 5% годовых..

Задача 17. Непромытый золотой песок содержит 20% чистого золота. После каждой промывки золотого песка отходит 20%, содержащихся в нем примесей, и теряется 10% от имеющегося в песке золота. Сколько следует произвести промывок, чтобы содержание чистого золота в золотом песке было не менее 50%?

Решение:



1. В начальный момент времени в песке содержится 20/100 = 1/5 часть чистого золота.

2. После первой промывки в песке останется

1/5(1 - 10/100) = 1/5 · 9/10 частей золота, имевшегося первоначально.

3. Если сделать n промывок, то чистого золота останется

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$$ частей от первоначального количества.

4. В начальный момент примеси в золотом песке составляли 4/5 частей.

5. После n промывок примеси будут составлять 4/5· $(4/5)^n$ частей от количества примесей, имевшихся первоначально в золотом песке.

6. Отношение веса чистого золота к общему весу песка после n промывок равно

$$\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}$$

7. По условию задачи, это отношение должно быть не менее 50/100 = 1/2 т.е.

$$\frac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n+\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n}\ge\frac{1}{2}$$

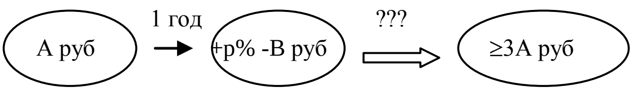
Отсюда, $(8/9)^n \ge 1/4$ или

$$n\ge\frac{\lg\frac{1}{4}}{\lg\frac{8}{9}}=\frac{\lg 4}{\lg\frac{9}{8}}\approx 11,77$$

Ответ: Необходимо произвести не менее 12 промывок.

Задача 18. Вклад в А рублей положен в сберегательную кассу с p% годовых. В конце каждого года вкладчик берет В рублей. Через сколько лет, после взятия соответствующей суммы, остаток будет больше или равен 3А? При каких условиях задача имеет решение?

Решение:



1. В конце первого года, после взятия В рублей на вкладе останется

А(1+p/100) - В или (А-100В/p)(1+p/100) + 100В/p руб.

2. В конце второго года, после взятия В рублей, на счету останется $(А-100В/p)(1+p/100)^2$ + 100В/p рублей.

3. Аналогично, после n лет сумма счета будет составлять

$(А-100В/p)(1+p/100)^n$ + 100В/p рублей

По условию задачи, на счету осталось не менее 3А рублей, т.е.

(A-100B/p)(1+p/100)^n + 100B/p≥3A.

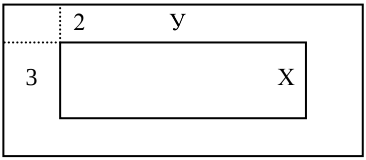
Отсюда
$$n \ge \frac{\lg\left(3A - \frac{100B}{p}\right) - \lg\left(A - \frac{100B}{p}\right)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Задача имеет единственное решение, если A>100B/p

Ответ:
$$n \ge \frac{\lg\left(3A - \frac{100B}{p}\right) - \lg\left(A - \frac{100B}{p}\right)}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Задача 18. Прямоугольная цветочная клумба должна занимать площадь в 216 квадратных метров, причем вдоль длинных сторон клумбы должны быть дорожки шириной по 2 метра, а вдоль остальных - по 3 метра. Каковы должны быть размеры клумбы, чтобы площадь дорожек не превышала 192 квадратных метра?

Решение:



1. Пусть ширина клумбы равна Х метров, а длина - У метров.
2. По условию, площадь клумбы 216 квадратных метров, т.е.

ХУ = 216.

3. (У + 6) метров - длина клумбы вместе с дорожками.
4. (У + 6)(Х + 4) - 216 =ХУ + 6Х + 4У - 192 квадратных метров.

По условию задачи, площадь дорожек не превышает квадратных метров, т.е. ХУ + 6Х + 4У-192< 192

или 6Х + 4У < 384 - 216 = 168

Таким образом, мы получили следующую систему:

$$\begin{cases} XY = 216 \\ 6X + 4Y \le 168 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} XY = 216 \\ X^2 - 28X + 144 \le 0 \end{cases}$$

Отсюда, $14 - \sqrt{52} \le X \le 14 + \sqrt{52}$ Но, учитывая что Х<У, получаем, что Х должен быть меньше $\sqrt{216} = 6\sqrt{6}$

Значит, $14 - 2\sqrt{13} \le X < 6\sqrt{6}$. Соответственно, У может меняться от

$6\sqrt{6}$ до $21 + 3\sqrt{13}$

Ответ: $14 - 2\sqrt{13} \le X < 6\sqrt{6}$, У=216/Х

У П Р А Ж Н Е НИ Я

1. Два завода должны были выпустить по плану 360 станков в месяц. Первый завод выполнил план на 112%, а второй на 110%. В результате оба завода выпустили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод отдельно?

Ответ: 24 и 16.

2. Из бочки, наполненной водой, взяли половину всего количества воды и еще два ведра. Тогда в ней осталось 40% воды. Сколько ведер воды вмещает бочка?

Ответ: 20 ведер.

3. В первую поездку автомобиль израсходовал 25% бензина, имевшегося в баке. Во вторую поездку он израсходовал 20% остатка. После этого в баке осталось на 2 литра бензина больше, чем было израсходовано за две поездки. Сколько литров бензина было первоначально в баке?

Ответ: 10 литров.

4. Автомобиль прошел от города до деревни со скоростью 40 км/час. Возвращаясь обратно, он прошел 75% расстояния с прежней скоростью, а остальной путь со скоростью 30 км/час, а поэтому и затратил на обратный путь на 10 минут больше, чем на путь от города до деревни. Найти расстояние от города до деревни.

Ответ: 80 км.

5. В первый день рабочий перевыполнил норму выпуска деталей на p%, а во второй день на q %, выпустив за 2 дня сверх нормы m деталей. Сколько деталей по норме он должен был запускать ежедневно?

Ответ: 100m : (p + q) деталей.

6. Из общего количества товара a %, его было продано с прибылью в p %, а из остатка b % было продано с прибылью q %. С какой прибылью нужно продать всю оставшуюся часть товара, чтобы общий процент прибыли составил r %?

Ответ: (r-ap/100-bq/100)/(1-a/100))/(1-b/100)

7. Отец предполагал разделить некоторую сумму денег между своими тремя сыновьями в отношении 7:6:5. Затем он изменил свое решение и разделил ту же сумму в отношении б : 5 : 4, Известно, что один из сыновей в результате деления получил на 12 рублей больше другого. Сколько получил каждый?

Ответ: 72 руб., 60 руб., 48 руб. или 36руб., 30 руб.,24 руб.

8. Первый сплав содержит металлы в отношении 1 : 2, а второй содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий металлы в отношении 17 : 27?

Ответ: 9 частей первого и 35 частей второго.

9. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После

удаления из руда 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, процент содержания железа в оставшейся руде повысился на 20%. Сколько железа осталось в руде?

Ответ: 187, 5 кг.

10. Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом за первый год составил p%, а за второй год q%. Каков должен быть прирост продукции за третий год, чтобы средний годовой прирост продукции за 3 года составил r%.

Ответ: $(100+r) \prec (100+r) \prec (100+r)/(100+p)/(100+q) - 100$

11. Поезд из пункта A в пункт B был отправлен с опозданием в 1 час 42 минуты и поэтому увеличил скорость движения на 20%. На последнем перегоне, составляющем 10% всего пути, он увеличил скорость на 25% относительно первоначальной и прибыл в B без опоздания. За какое время, при нормальных условиях, поезд проходит путь AB?

Ответ: За 10 часов.

12. Имеется 3 сосуда с содержанием кислоты по объему 80%, 72% и 50% соответственно. Объемы сосудов относятся как 2:3:5. Содержимое этих сосудов вылили в сосуд с 5,34 литрами чистой кислоты и 0,66 литрами воды. Полученная смесь содержит 65% кислоты. Какова вместимость каждого из 3-х сосудов?

Ответ: 12, 18 и 30 литров.

13. За 4 кг муки и 5 кг крупы заплатили 19 руб 60 коп. В следующий раз за 5 кг муки и 6 кг крупы заплатили на 1 руб 40 коп больше, чем в первый раз. При этом цена на муку снизилась на 15%, а на крупу на 10%. Определять цену муки и крупы до снижения цены.

Ответ: 2 руб 40 коп и 2 руб.

14. Для кормления 10 лошадей и 14 корой отпускалось ежедневно 180 кг сена. После увеличения нормы выдачи сена для лошадей на 25% и для коров на 20% стали отпускать 218 кг в день. Сколько килограмм сена отпускали первоначально в день одной лошади и одной корове?

Ответ: 4 кг и 10 кг.

15. Кооператив купил на 3100 рублей кофе двух сортов, по 30 рублей и по 20 рублей за 1 кг. При жарении кофе первого сорта потерял 14% своего веса, а кофе второго сорта - 15%. Продав жареный кофе, соответственно по цене 35 руб и 25 руб за 1 кг, кооператив получил прибыль 105 рублей. Сколько кофе каждого сорта купил кооператив?

Ответ: 50 кг и 80 кг.

16. Два ученика купили книг на 48 рублей. Для уплаты первый отдал все свои деньги, а второй 75% своих денег. Если бы первый ученик отдал 75% своих денег, а второй все свои деньги, то для уплаты не хватало бы 1руб.50 коп. Сколько денег было у каждого ученика?

Ответ: 30 руб и 24 руб.

17. В два амбара ссыпали 96 тонн зерна. Когда из первого амбара вывезли 2/3 имевшегося в нем зерна, а из второго 40% его, то во втором

амбаре осталось зерна втрое больше, чем в первом. Сколько тонн зерна ссыпали в каждый амбар?

Ответ: 36 тонн и 60 тонн.

18. Имеются два слитка, из которых первый содержит 270 г золота и 30 г меди, а второй содержит 400 г золота и 100 г меди. Сколько нужно взять от каждого из этих слитков, чтобы получить 400 г сплава с содержанием золота 82,5% т.е. 825 пробы?

Ответ: 100 г и 300 г.

19. Два сплава золота и меди один из которых 950-й пробы, а второй 800-й пробы, сплавляют с двумя граммами чистого золота. В результате получают сплав весом 25 г 906 пробы. Вычислить вес первых двух сплавов.

Ответ: 15 г и 8г.

20. Денежная прения была распределена между тремя изобретателями следующим образом: первый получил половицу всей премии без 3/22 части того, что получили двое других вместе; второй получил четвертую часть всей премии и 1/56 часть денег, полученных вместе остальными двумя. Третий получил 30000 рублей. Как велика была премия и сколько получил каждый?

Ответ: 95000 руб, 40000 руб, 25000 руб, 30000 руб.

21. Два сосуда одинакового веса содержат разное количество вода. Вес первого сосуда с водой составляет 4/5 веса второго сосуда с водой. Если всю воду из второго сосуда перелить в первый сосуд, то вес первого сосуда будет в 8 раз больше веса второго. Зная, что в первом сосуде было на 50 г воды меньше, чем во втором, определить вес сосудов и первоначальное количество воды в каждом.

Ответ: 50 г, 150 г, 200 г.

22. Было собрано и засушено некоторое количество грибов двух видов. Известно, что свежие грибы первого вида содержат 40% воды, а второго вида 30% воды. Сушеные грибы обоих видов содержат 10% воды. Сколько грибов того и другого вида было собрано и сколько получено после сушки, если всего было собрано 720 кг грибов, а количество сушеных грибов первого вида получилось в 6 раз больше количества сушеных грибов второго вида?

Ответ: 630 кг,90 кг, 420 кг,70 кг.

23. Сплав весом Р кг, состоящий из двух металлов теряет в воде А кг. Такой же вес Р кг первого металла теряет в воде В кг, а второго С кг. Найти вес составляющих сплав металлов.

Ответ: Р(А-С)/(В-С) кг, Р(В-А)/(В-С), С🖫А🖫В или В🖫А🖫С.

24. Производительность первого станка составляет m % от суммы производительности второго и третьего станков. Производительность второго станка составляет n % от суммы производительностей первого и третьего станков. Какой процент составляет производительность третьего станка от суммы производительностей первого и второго

станков?

Ответ: 100(10000-mn)/(100(m+n)+2mn) %

25. В магазине имеется S метров сукна двух сортов: ценой a руб за 1 метр и ценой b руб за метр. Сукно первого сорта было продано с прибылью p%, сукно второго сорта - с прибылью q%. Причем, общее количество прибыли оказалось равным C рублей. Сколько метров сукна каждого сорта имелось в магазине?

Ответ: (100C-bqS)/(ap-bq) м, (100C-apS)/(bq-ap) м, bq≠ap/

26. 36 г цинка в воде весят 31 г. 23 г свинца в воде весят 21 г. Сплав цинка и свинца весом 292 г в воде весит 261 г. Сколько цинка и свинца содержится в сплаве?

Ответ: 108 г и 184 г.

27. Смешали спирт двух сортов крепостью 84 градуса и 70 градусов. Получилась смесь крепостью 75 градусов. После этого к смеси добавили еще 5 литров спирта первого сорта и 135 литров спирта второго сорта и получили спирт крепостью в 72 градуса. Сколько литров спирта каждого сорта взяли в первый раз?

Ответ: 25 литров и 45 литров.

28. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена фотоаппаратов упала с 300 руб до 192 руб. На сколько процентов снижалась цена фотоаппарата каждый раз?

Ответ: 20%

29. Кооператив купил на некоторую сумму товар и продал его с наценкой в 100 рублей. На вырученные деньги кооператив купил новый товар который продал за 1210 рублей, сделав на этот товар столько же процентов наценки, сколько и в первый раз. На такую сумму кооператив купил товара в первый раз?

30. Из листа жести, имеющего форму прямоугольника, приготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной в 5 см и получившиеся края загнуты. Какого размера был лист жести, если длина его вдвое больше ширины и если объем коробки равен 1500 кубических сантиметров?

Ответ: 40 см на 20 см.

31. Куплено 12 яблонь с целью посадки на каждую делянку по равному количеству. Но пришлось посадить на каждую делянку на 3 яблони меньше, так как делянок оказалось на 2 больше, чем предполагали. Сколько делянок было фактически?

Ответ: 4 делянки.

32. Из сосуда, наполненного 96% раствором кислоты, отлили 2,5 литра и долили сосуд 80% раствором той же кислоты. Затем еще раз отлили 2,5 литра и снова долили 80% раствором кислота. После этого в сосуде получился 89% раствор кислоты. Определить вместимость сосуда.

Ответ: 10 литров.

33. Куплен товар двух сортов: первого на 150 рублей, второго на 120 рублей. Второго сорта на 3 кг больше, чем первого и стоит он на 4

руб.50 коп за килограмм дешевле. Сколько каждого сорта товара куплено?

Ответ: 12 кг, 15 кг.

34. Вклад в сумме 50000 рублей принес в течение года некоторый доход. Какой процент составил доход, если эти 50000 рублей вместе с доходом за первый год в течение следующего года дали 2612 рублей 50 коп дохода, причем на второй год число процентов дохода было на 0,5 больше, чем число процентов дохода в первый год?

Ответ: 4,5%

35. В магазин доставлено несколько оконных стекол одного и того же сорта общей стоимостью 90 рублей. При перевозке два стекла оказались разбитыми. Остальные стекла были проданы с прибылью по 2 рубля за стекло, причем всего получено 14 рублей прибыли. Сколько стекол было доставлено в магазин?

Ответ: 15 стекол.

36. На складе было некоторое количество угля. Один завод качал вывозить уголь со склада 1 сентября по а тонн в день, второй завод с 10 сентября по b тонн в день. К концу дня 25 сентября на складе оказалась половина первоначального количества угля. Когда весь уголь был вывезен, если оба завода получили угля поровну?

Ответ: К концу 15 октября.

37. Из сосуда, вмещающего а литров и наполненного молоком, отлили некоторую часть и долили сосуд водой. Затем опять отлили такую же часть смеси и снова сосуд долили водой, после чего в сосуде осталось b литров молока. Сколько литров жидкости отливали каждый раз?

Ответ: $a-\sqrt{ab}$ литров.

38. В середине прямоугольной площадки со сторонами 12 и 10 метров требуется разбить прямоугольную клумбу площадью 8 квадратных метров так, чтобы ее края были на одинаковом расстоянии от краев площадки. На каком расстоянии от края площадки должен быть расположен край клумбы?

Ответ: 4 метра.

39. Фотографическая карточка размером 12 см на 18 см имеет рамку одинаковой ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади карточки.

Ответ: 3 см.

40. Из двух кусков металла первый весит 880 грамм, а второй 858 грамм. Объем первого куска на 10 кубических сантиметров меньше объема второго. Найти удельный вес каждого металла, если удельный вес первого на 1 г/кубический см. больше удельного веса второго.

Ответ: 8,8 и 7,8 г/см^3.

41. К раствору, содержащему 40 грамм соли, добавили 200 грамм воды. После чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

Ответ: 160 г, 20% .

42. Цветок лотоса возвышался над поверхностью пруда на 4 фута.

Под напором ветра он скрылся под водой на расстоянии 16 футов от того места, где он раньше поднимался над водой. Какой глубины был пруд?

Ответ: 30 футов.

43. На самом берегу ручья растет тополь. Порыв ветра сломил его на высоте трех метров от земли и он упал перпендикулярно к направлению ручья, ширина которого равна четырем метрам. При падении дерево уперлось вершиной в край противоположного берега. Как высок был тополь?

Ответ: 8 метров.

44. Две башни на равнине находятся на расстоянии 60 метров одна от другой. Высота одной башни 50 метров, другой 40 метров. Между башнями находится колодец, одинаково удаленный от вершин обеих башен. Как далеко находится колодец от основания каждой башни?

Ответ: 22,5 метра и 37,5 метра.

45. На а рублей куплены книги. Если бы на эти деньги купили на 4 книги меньше, то каждая книга стояла бы одним рублем дороже. Сколько куплено книг?

Ответ: $2(1+\sqrt{1+a})$ книг, если $a = n^2 - 1$, $n > 1$ целое.

46. Имеется некоторое количество одинаковых шаров. Их можно уложить в виде квадрата или в виде правильного треугольника. Найти число этих шаров, если известно, что при треугольном их расположении в стороне треугольника будет на два шара больше, чем в стороне квадрата при квадратном их расположении.

Ответ: 36 шаров.

47. Кусок материи стоит А рублей. Если бы в куске было на В метров больше, а весь кусок стоил бы также А рублей, то каждый метр стоил бы на С рублей меньше. Сколько метров было в куске?

Ответ: $\frac{1}{2C}(-BC+\sqrt{B^2C^2+4ABC})$ метров.

48. Равнодействующая двух сил, направленных под прямым углом, равна 25 кг. Если меньшую силу увеличить на 8 кг, а большую уменьшить на 4 кг, то равнодействующая останется без изменения. Найти величину составляющих сил.

Ответ: 7 кг и 24 кг.

49. Березовые и осиновые дрова были куплены за 164 рубля. Затем березовые дрова были проданы за 125 рублей, а осиновые за 48 рублей, причем на первых было получено столько процентов прибыли, сколько на вторых убытку. За сколько рублей были куплены те и другие дрова в отдельности?

Ответ: 100 рублей и 64 рубля или
102 рубля 50 копеек и 61 рубль 50 копеек.

50. Отец хочет разделить 180 яблок между 11 детьми. Для этого половину яблок он отдал сыновьям, которые разделили их поровну. Другую половину он отдал дочерям, которые также их разделили

поровну между собой. Оказалось, что каждая дочь получила на 3 яблока больше, чем каждый сын. Сколько сыновей и дочерей было у отца?

Ответ: 6 сыновей и 5 дочерей.

51. Ученики одного класса сложились поровну и купили географическую карту за 4 рубля 20 копеек. Если бы учеников в классе было на 7 меньше, то каждому пришлось бы заплатить на 5 копеек больше. Сколько учеников в классе?

Ответ: 28 учеников.

52. Две суммы денег, всего 50000 рублей, положены в сберкассу с 3% годовых. Каждая из них дала 600 рублей дохода, причем первая сумма находилась в сберкассе на 4 месяца дольше, чем вторая. Как велика каждая сумма и на какой срок она была помещена, если известно, что ни одна из сумм не находилась в сберкассе больше года?

Ответ: 20000 на 1 год и 30000 на 8 месяцев.

53. Общее увеличение веса двух кристаллов, одного весом 1,2 грамма, другого 1,5 грамма, в течение двух дней равно 0,24 грамма. Известно, что первый кристалл растет быстрее второго и его рост составляет p% в день от первоначального веса в 1,2 грамма. Рост второго кристалла составляет q % в день от первоначального веса в 1,5 грамма. Если же считать, что процент роста кристаллов за день исчисляется от веса каждого кристалла, который он имел в начале каждого дня, то через два дня увеличение веса кристаллов было бы не 0,24, а 0,2454 грамма. Найти p и q.

Ответ: 5% и 4%.

54. Находящийся под постоянным давлением газ в количестве A кубических метров последовательно пропускают через четыре фильтра, каждый из которых поглощает P% общего объема примесей, содержащихся в газе перед поступлением в фильтр. Затем газ смешивается с B кубическими метрами газа, содержащего q% примесей и находящегося под тем же давлением. Какой процент примесей допустим для газа до его очистки, если число процентов примесей в газовой смеси не должно превышать r%?

Ответ: Не более $((A+B)r-Bq)/(A(1-r/100)(1-P/100)^4+rA/100)$ %, $(A+B)r>Bq$.

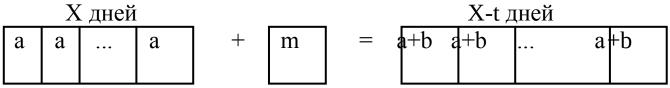
55. В резервуар, содержащий A литров воды, сначала через одну труба вливают a литров P% процентного раствора спирта. После тщательного перемешивания, через другую трубу выливают A литров смеси. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы в резервуаре получился раствор спирта крепостью не менее q%. Известно, что $q<P$.

Ответ: $n \geq \dfrac{\lg P-\lg(P-q)}{\lg(A+a)-\lg A}$

2. 3. Задачи на работу.

Задача 1. Для выполнения плана тракторист должен был ежедневно пахать по a гектаров. Перевыполняя норму на b гектаров в день, он закончил работу на t дней раньше срока и успел вспахать за это время m гектаров сверх плана. Сколько гектаров пашни должен был вспахать тракторист по плану?

Решение:



1. Обозначим через X - количество дней, которое должен был работать тракторист по плану.
2. Тогда площадь вспаханного по плану поля будет равна X≺a га.
3. На самом деле тракторист работал X-t дней.
4. За это время он, вспахал (x - t) ≺ (a +b)   га.
5. По условию задачи, это на m га больше, чем запланировано, т.е.   (x - t) ≺ (a +b) = x≺a + m

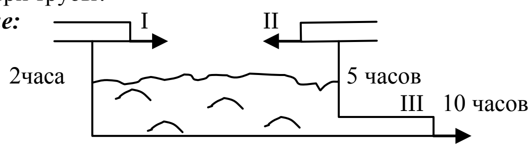
Решив это уравнение, получим X = (m + at + bt)/b.

Значит, по плану тракторист должен вспахать a·(m + at + bt)/b га пашни. При любых положительных значениях параметров задача имеет единственное решение.

Ответ: Тракторист должен вспахать по плану a (m + at + bt)/b   га пашни.

Задача 2. В бассейн проведены 3 трубы. Через первые две вода вливается, через третью вытекает. Через одну первую трубу бассейн может наполниться за 2 часа, через одну вторую за 5 часов, а через третью трубу вся вода из наполненного бассейна может вытечь за 10 часов. За какое время наполнится бассейн, если открыть все три трубы?

Решение:



1. Будем считать, что емкость бассейна составляет 10 условных единиц.
2. Обозначим через X - время в часах, необходимое для наполнения бассейна в том случае, когда все трубы открыты.
3. Через первую трубу за один час в бассейн поступает 10 : 2 = 5 у.е. воды, через вторую 10 : 5 = 2, а через третью вытекает 10 : 10 = 1 у.е. воды в час.
4. Значит, за время X через первую трубу втечет 5X, через вторую 2X и через третью вытечет X условных единиц воды.

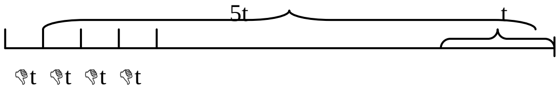
При этом бассейн наполнится. Поэтому 5X + 2X - X = 10

Решая это уравнение, находим X = 5/3 (час.)

Ответ: Для наполнения бассейна потребуется 1 час 40 минут.

Задача 3. Насколько человек взялись вырыть канаву и могли бы закончить работу за 24 часа, если бы делали все одновременно. Вместо этого они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени и затем каждый работал до окончания всей работы. Сколько времени они рыли канаву, если первый приступивший к работе проработал в 5 раз больше времени, чем последний?

Решение:



1. Обозначим буквой t время работы последнего землекопа

2. Первый землекоп проработал 5t часов, а среднее время работы первого и последнего землекопа составляет 3t часов.

3. Второй землекоп работал на некоторое время меньше, чем первый, но предпоследний работал на то же время больше, чем последний. Поэтому среднее время работы второго и предпоследнего землекопов составляет 3t часов. Рассуждая аналогично, мы приходим к выводу, что среднее время работы каждого землекопа составляет 3t часов.

4. Согласно условию задачи среднее время работы каждого землекопа, необходимое для выполнения всей работы, равно 24 часам. Поэтому 3t = 24. Отсюда t = 8.

Значит, первый землекоп работал 40 часов, что и составляет общее время рытья канавы. Решение задачи единственно, хотя из условия задачи невозможно определить сколько человек работало и через какой промежуток времени они приступали к работе.

Ответ: 40 часов.

Задача 4. Два трактора различной мощности при совместной работе вспахали за 15 часов шестую часть поля. Если бы первый трактор работал один 12 часов, а затем второй трактор 20 часов, то они вспахали бы 20% всего поля. За какое время может вспахать все поле каждый трактор отдельно?

Решение:

I - 15ч II - 15ч 1/6	

I - 12 ч II- 20ч 20%	

1. Предположим, что поле составляет 60 условных единиц пашни, первый трактор может вспахать X условных единиц пашни за час и второй трактор может вспахать У условных единиц пашни за час.

2. По условию задачи, оба трактора за 15 часов совместной работы вспахали шестую часть поля, т.е. 10 у.е.

Поэтому, I5X + 15У = 10.

3. Если первый трактор работал 12 часов, а второй работал 20 часов, то было вспахано 20% поля, т.е. 12 у.е. Поэтому, I2Х + 20У = 12.

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

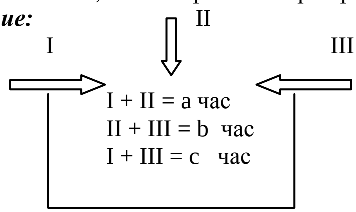
$$\begin{cases} 15X + 15У = 10 \\ 12X + 20У = 12 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3X + 3У = 2 \\ 3X + 5У = 3 \end{cases}$$

Отсюда Х = 1/6 и У = 1/2. Значит, первому трактору потребуется на вспашку всего поля 60 : 1/6 = 360 часов, а второму 60 : 1/2 = 120 часов.

Ответ: Тракторы могут вспахать все поле за 360 и 120 часов, соответственно.

Задача 5. В бассейн проверены три крана. Первый и второй краны вместе бассейн наполняется за а часов. Второй и третий - за b часов. Первый и третий - за с часов. Сколько времени потребуется для наполнения бассейна, если открыть все три крана?

Решение:



1. Предположим, что емкость бассейна составляет a⍰b⍰c условных единиц, Х, У и Z- производительность каждого крана, соответственно, т.е. количество у.е. воды, вливаемых в бассейн через соответствующий кран за один час.

2. Первый и второй краны заполняют бассейн за а часов, т.е. а (Х+У) = abc

3. Второй и третий краны заполняют бассейн за b часов, т.е.

b (У+Z) = abc

4. Первый и третий краны заполняют бассейн за с часов, т.е. с (Х+Z) = abc

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a(X + У) = abc \\ b(У + Z) = abc \\ c(X + Z) = abc \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X + У = bc \\ У + Z = ac \\ X + Z = ab \end{cases}$$

Сложив левые и правые части системы и поделив на 2, получаем

X + У+ Z = (ab + ac +bc)/2

Значит, за один час три крана нальют в бассейн (ab + ac +bc)/2 у.е. воды, а весь бассейн заполнится за 2abc/ (ab + ac +bc) часов. Несложно подсчитать время наполнения бассейна каждым краном в отдельности, при этом отрицательное время будет означать, что через данный кран вода из бассейна вытекает, а бесконечное время означает, что соответствующий кран закрыт. При положительных значениях параметров a, b, c задача имеет единственное решение.

Ответ: 2abc/ (ab + ac +bc)   часов.

Задача 5. Надо вырыть ров за 12 дней. Два землекопа, проработав 6 дней, пригласили третьего и кончили работу, проработав втроем еще 6 дней. Производительность первого землекопа относится к производительности второго как 3**:**2. Сумма производительностей первого и третьего относится к сумме производительностей второго и третьего как 8 : 7. За сколько дней может вырыть ров каждый землекоп, работая отдельно?

Решение:

I + II 6 дней	I + II + III 6 дней

1. Будем считать, что вся работа составляет 6 условных единиц. Обозначим через **X,**Y,Z количество условных единиц работы, которую может выполнить соответственно каждый землекоп за один день.

2. Для выполнения всей работы первый я второй землекопы проработали 12 дней, а третий проработал 6 дней,

т.е. 12X + 12Y + 6Z = 6 или 2X+2Y+Z = 1.

3. Отношение производительностей первого и второго землекопов приводит к уравнению 2X = 3Y.

4. Отношение суммы производительностей дает уравнение

(Y+Z)/(X+Z)=7/8 или Z+8Y-7X = 0

В результате мы получили следующую систему уравнений:

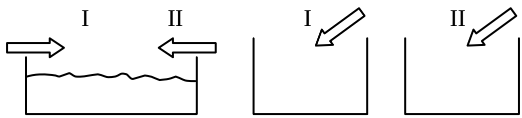
$$\begin{cases} 2X + 2Y + Z = 1 \\ 2X = 3Y \\ Z + 8Y - 7X = 0 \end{cases}$$

Решив систему, найдем X = 1/5, У = 2/15 и Z = 1/3.
Значит, землекопы, работая отдельно, могут выкопать весь ров за 6: 1/5 = 30, 6:2/15 = 45 и 6: 1/3 = 18 дней.

Ответ: 30, 45, 18 дней.

Задача 6. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 часа 55 минут. Первая труба может наполнить его на два часа скорее, чем вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

Решение:



2 ч 55 м X ч X+2 ч

1. Пусть X часов - время, необходимое для заполнения бака первой трубой.

2. Если принять всю емкость бака за 1, то за час первая труба наполнит 1/X часть бака.

3. (X + 2) часов - время наполнения бака одной второй трубой.

4. За один час вторая труба наполнит 1/(X + 2) часть бака.

5. Обе трубы вместе за один час работы наполнят 1/X + 1/(X + 2) часть бака.

По условию задачи, весь бак наполнится за 2 часа 55 мин, т. е. за 35/12 часа.

$$\frac{35}{12}\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{X+2}\right)=1 \quad \text{или} \quad 6X^2-23X-35=0$$

Отсюда, X = 5 или X = -7/6.

Ответ: Первая труба наполнит бак за 5 часов, вторая за 7 часов.

Задача 7. Две молотилки обмолачивают собранную пшеницу за 4 дня. Если бы одна из них обмолотила половину всей пшеницы, а затем вторая - оставшуюся часть, то вся работа была бы окончена за 9 дней. За сколько дней каждая молотилка в отдельности могла бы обмолотить всю пшеницу?

Решение: 9 дней

1. Пусть X дней необходимо затратить первой молотилке для того, чтобы обмолотить всю пшеницу.

2. Если принять количество всей пшеницы за 1, то за один день первая молотилка обмолотит 1/X часть всей пшеницы.

3. (18 - X) дней необходимо затратить второй молотилке для обмолота всей пшеницы.

4. За один день вторая молотилка обмолотит 1/(18 - X) часть всей пшеницы.

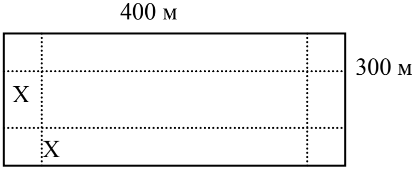
По условию задачи, за 4 дня обе молотилки обмолотят всю пшеницу, т.е. 4(1/X + 1/(18-X)) = 1 или X^2-18X+72 = 0

Отсюда, X=12 или X=6.

Ответ: Одна молотилка может обмолотить всю пшеницу за 6 дней, другая - за 12 дней.

Задача 8. По плану тракторист должен в течение двух дней вспахать прямоугольный участок земли, длина которого 400 метров, а ширина 300 метров. Тракторист начал пахоту с краев участка, двигаясь кругом по периметру непропаханной части, постепенно приближаясь к середине. На каком расстоянии от края участка должен остановиться тракторист, чтобы была вспахать ровно половина участка?

Решение:



1. Пусть Х метров - расстояние от края до остановившегося тракториста.

2. Длина невспаханного участка (400 - 2Х) метров, а ширина (300 - 2Х) метров. По условию задачи, тракторист не вспахал ровно половину площади участка, т.е. 60000 га. Поэтому,

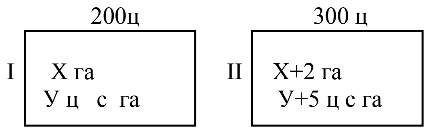
$$(300 - 2X)(400 - 2X) = 60000 \quad \text{или} \quad X^2 - 350X + 15000 = 0$$

Отсюда, Х = 50 или Х = 300. Второе значение не подходит по условию.

Ответ: Тракторист должен остановиться на расстоянии 50 метров от края.

Задача 9. Учет урожая на участках двух соревнующихся колхозных бригад показал, что на участке первой бригады было собрано 200 центнеров пшеницы. На участке второй бригады, имеющем площадь на 2 гектара больше, собрано 300 центнеров пшеницы при урожае, на 5 центнеров с гектара больше, чем на первом участка. Найти площадь каждого участка земли и количество собранной пшеницы с гектара того и другого участка.

Решение:



1. Пусть Х га - площадь первого участка, а У центнеров - урожай с каждого гектара первого участка.

2. По условию задачи урожай с первого участка составляет 200 ц, т.е. ХУ = 200.

3. (Х + 2) га - площадь второго участка, (У + 5) центнеров - урожай с каждого гектара второго участка.

4. Со второго участка собрано 300 центнеров пшеницы, т.е. (Х + 2)(У + 51 = 300.

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений!

$$\begin{cases} XY = 200 \\ (X+2)(Y+5) = 300 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} Y = \dfrac{200}{X} \\ XY + 5X + 2Y = 290 \end{cases}$$

Подставив У во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно Х: $X^2 - 18X + 80 = 0$.

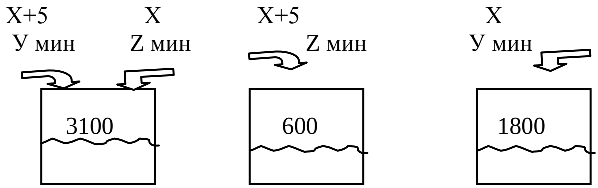
Уравнение имеет два корня Х = 8 и Х = 10.

Соответственно, У = 25 и У = 20.

Ответ: Площади участков 8 га и 10 га, собрано 25 ц и 30 ц или площади участков 10 га. и 12 га, собрано 20 ц и 26 ц с га.

Задача 10. Две трубы, действуя одна после другой, наполнили бассейн вместимостью 3100 ведер. Через первую трубу вливалось воды на 5 ведер в минуту больше, чем через вторую. Если бы первая труба действовала столько времени, сколько вторая, то через нее влилось бы в бассейн 600 ведер воды, а если бы вторая труба действовала столько времени, сколько первая, то через нее влилось бы в бассейн 1800 ведер. Сколько ведер воды в минуту вливалось в бассейн через каждую трубу?

Решение:



1. Пусть X ведер воды вливается в бассейн за одну минуту через вторую трубу, У минут - время работы первой трубы и Z минут - время работы второй трубы.

2. (X + 5) ведер воды вливается в бассейн через первую трубу.

3. XУ ведер воды нальется в бассейн через вторую трубу, если она будет действовать столько времени, сколько действовала первая труба. Так как нальется 1800 ведер воды, то XУ = 1800.

4. (X + 5)Z ведер воды нальется в бассейн через первую трубу, если она будет действовать столько времени, сколько действовала вторая. Так как нальется 600 ведер воды, то (X + 5)Z = 600.

5. (X + 5)У ведер воды влилось через первую трубу.

6. XZ ведер воды влилось через вторую трубу.

7. Так как всего влилось 3100 ведер воды, то

$$(X + 5)У + XZ = 3100.$$

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(X+5)Y+XZ=3100\\(X+5)Z=600\\XY=1800\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(X+5)Y+XZ=3100\\Z=\dfrac{600}{X+5}\\Y=\dfrac{1800}{X}\end{cases}$$

Подставив У и Z в первое уравнение получим:

$$18(X+5)/X + 6X/(X+5) = 31$$

Обозначив X/(X+5) = t, получим квадратное уравнение относительно t $\quad 6t^2-31t + 18 = 0$.

Уравнение имеет два корня t = 9/2 и t = 2/3.

Соответственно, X/(X+5) = 9/2 или X/(X+5) = 2/3

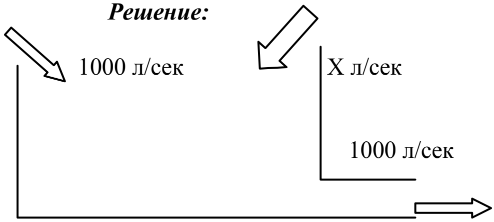
Отсюда, X = -45/7 или X = 10. Первое значение не удовлетворяет условию задачи. Соответственно, У = 180 и Z=

40.

Ответ: В бассейн вливалось через первую трубу 15 ведер воды в минуту, а через вторую 10 ведер воды в минуту.

Задача 11. В бассейн может поступить вода через две трубы разной пропускной способности. Меньшая труба за 1секунду пропускает 1000 литров воды. В бассейне имеется кран, через который за одну секунду может вытечь 1000 литров воды. В каких пределах может меняться пропускная способность большей трубы, если известно, что за время от трех до четырех секунд в бассейн поступило 16000 литров воды. Причем 10000 литров поступило при одновременном действии двух труб и при закрытом кране, а 6000 литров воды поступило при действии большей трубы и открытом кране?

Решение:



1. Пусть X литров в секунду - пропускная способность большей трубы.

2. (X + 1000) литров воды поступает в бассейн при действии двух труб в течение 1 секунды и закрытом кране.

3. (X - 1000) литров воды поступает в бассейн в секунду при действии только большой трубы и открытом кране.

4. 10000/(X + 1000) секунд - время, необходимое в первом случае для вливания в бассейн 1000 литров воды.

5. 6000/(X - 1000) секунд - время, необходимое для вливания 6000 литров во втором случае.

Согласно условию задачи, общее время составляет от трех до четырех секунд, т.е. $3 \le 10000/(X+1000) + 6000/(X-1000) \le 4$

Приведя подобные, получим следующую систему неравенства.

$$\begin{cases} 3X^2\text{-}16000X+1000000 \le 0 \\ 4X^2\text{-}16000X \ge 0 \end{cases}$$

Из первого неравенства следует, что

$$\frac{1000}{3}\ 8\text{-}\sqrt{61}\ \le X \le \frac{1000}{3}\ 8+\sqrt{61}$$

Из второго неравенства получаем $X \le 0$ и $X \ge 4000$. В итоге,

$$4000 \le X \le \frac{1000}{3}\ 8+\sqrt{61}$$

Ответ: Производительность большой трубы должна быть не менее 4000 литров в секунду и не более $\frac{1000}{3}\ 8+\sqrt{61}\ \approx 5270$ литров в секунду.

Задача 12. Двое рабочих наняты на один и тот же срок работы, но при разной оплате труда. Первый работал на 5 дней меньше срока и получил 200 рублей. Второй работал на 5 дней больше срока к получил 800 рублей. Если бы первый работал столько же дней, сколько второй, а второй работал бы столько дней сколько проработал первый, то первый получил бы больше, чем второй. Определить срок работы.

Решение:

I	II	I		II
X-5 дн	X+5 дн	X+5 дн	>	X-5 дн
200 руб	800 руб	?		?

1. Пусть X дней - срок работы.
2. (X - 5) дней работал первый рабочий и получил в день по 200/(X - 5) рублей.
3. (X + 5) дней работал второй рабочий, получая в день 800/(X + 5) рублей.
4. Если бы первый рабочий работал столько дней, сколько работал второй, то он получил бы 200(X + 5)/(X - 5) рублей.
5. Если бы второй работал столько дней, сколько первый, то он получил бы 800(X - 5)/(X + 5) рублей.

По условию задачи, первый рабочий получил бы больше второго, т.е. $200(X + 5)/(X - 5) > 800(X - 5)/(X + 5)$ или $(4(X-5)^2 - (X+5)^2)/(X^2-25)<0$. Отсюда, $(3X-5)(X-15)/(X^2-25)<0$. Используя метод интервалов, находим, что $5 < X < 15$.

Ответ: Срок работы был назначен больше 5 и меньше 15 дней.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. При одновременном действии двух труб бассейн заполняется за 8 часов. Обе трубы действовали в течение двух часов вместе, а затем первую трубу закрыли. Вторая труба закончила наполнение бассейна за 18 часов. За какое время каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бассейн?

Ответ: 12 и 24 часа.

2. Для откачивания воды из шахты поставлено 3 насоса. Первый насос, действуя отдельно, может выкачать всю воду за 12 часов, второй за 15 часов и третий за 20 часов. Первый и третий насосы действовали совместно три часа, а затем к ним присоединился и второй насос. Сколько времени потребовалось дня откачивания воды из шахты?

Ответ: 6 часов.

3. Бригада лесорубов должна была по плану заготовлять ежедневно по 50 кубометров дров. Но бригада заготовляла ежедневно по 56 кубометров и закончила работу на три дня раньше, заготовив при этом на 120 кубометров дров больше, чем полагалось по плану. Сколько кубометров дров должна была заготовить бригада по плану?

Ответ: 2400. кубометров.

4. Некоторый кооператив нанял машинистку, пообещав ей 12000 рублей и холодильник, если она проработает год. Однако через 7 месяцев машинистка ушла с работы, получив в качестве оплаты за свой труд холодильник и 5000 рублей. Сколько стоит холодильник?

Ответ: 4800 рублей.

5. Одна автомашина может перевезти некоторый груз за 18 часов, другая автомашина этот же груз может перевезти за 24 часа. К перевозке обе машина приступили одновременно и проработали вместе несколько часов. Остаток груза одна первая машина перевезла за 4 часа. Столько всего часов работала первая машина?

Ответ: 12 часов.

6. Двумя комбайнами собирают урожай пшеницы за 6 дней. Если же обоими комбайнами собрать только половину урожая, то первым комбайном уборка урожая будет закончена за 4,5 дня. За сколько дней можно убрать урожай каждым из этих комбайнов в отдельности?

Ответ: 9 и 18 дней.

7. Пропалывая в час по 10 соток капусты, группа студентов могла закончить отведенный ей на день участок в 6 часов вечера. Прополов так половину участка, группа стала полоть по 12 соток в час и закончила свою работу в 5 часов вечера. Определить величину участка и время начала работы группы.

Ответ: 120 соток, 6 часов утра.

8. В бак проведены две трубы. Если сначала половину бака наполнить через одну первую трубу, а потом другую половину через одну вторую трубу, то весь бак будет наполнен через 2 часа. Если же через первую трубу наполнить третью часть бака, а потом оставшуюся часть наполнить через одну вторую трубу, то весь бак наполнится через 2 часа 10 минут. За какое время каждая труба отдельно может наполнить бак?

Ответ: 1,5 и 2,5 часа.

9. Мастерская получила заказ. Две трети заказа выполнил мастер, а затем оставшуюся часть закончил его помощник. Таким образом, весь заказ был выполнен через 6 часов 40 минут. Если бы мастер выполнил треть всего заказа, а оставшуюся часть выполнил бы его помощник, то весь заказ был бы выполнен за 7 часов 20 минут. За сколько часов мог бы выполнить весь заказ каждый из них, работая один?

Ответ: 6 часов и 8 часов.

10. Если в ванне открыть одновременно оба крана наполняющий

и выпускающий, то ванна наполнится через 36 минут. Однажды, в течение 6 минут были открыты оба крана. Затем выпускающий кран был закрыт и тогда наполнение ванны закончилось через 10 минут. За сколько минут наполнится ванна через первый кран, если закрыть второй? За сколько минут выльется из полной ванны вода, если закрыть первый кран и открыть второй?

Ответ: 12 и 18 минут.

11. Для наполнения резервуара была сначала открыта первая труба, через которую каждую минуту поступает 600 литров 30% раствора спирта, затем, через 45 минут, вступила в действие вторая труба, дающая в минуту 800 литров 40% раствора спирта. Через какое время в резервуаре получится 35% раствор спирта?

Ответ: Через 2 часа 15 минут.

12. Если рабочий будет ежедневно обрабатывать по a деталей, то до назначенного срока он не успеет обработать по плану m деталей, рабочий стал обрабатывать по b деталей в день и успел в назначенный срок обработать на n деталей больше плана. Сколько деталей' по плану должен был обработать рабочий?

Ответ: (an + bm)/(b-a) деталей.

13. Артель лесорубов должна была по плану ежедневно заготавливать a кубометров дров. Лесорубы, перевыполняя план, заготовляли ежедневно сверх нормы b кубометров дров и окончили заготовку на m дней раньше срока. Сколько кубометров дров заготовили лесорубы?

Ответ: am (b+a)/b кубометров.

14. Для перевозки груза в течение определенного срока было нанято несколько грузовых машин одинаковой мощности. Если бы машин было на 2 меньше, то для перевозки груза потребовалось бы на 2 часа больше срока, если бы машин было бы на 4 больше, то времени для перевозки потребовалось бы на 2 часа меньше срока. Сколько машин было нанято и сколько времени потребовалось для перевозки груза.

Ответ: 8 машин, 6 часов.

15. Два мастера, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 12 дней. Так как первый мастер работал 2 дня, а второй 3 дня, то они выполнили только 20% работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждый мастер, работая отдельно?

Ответ: 20 дней, 30 дней.

16. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы один из рабочих заболел и второй рабочий закончил работу за 40 дней. За сколько дней каждый из рабочих, работая один, может выполнить эту работу?

Ответ: 50 дней, 75 дней.

17. Два завода получили заказы на изготовление одного и того же числа машин. Первый начал работу на 20 дней, а окончил на 5 дней

раньше второго. К тому моменту времени, когда оба завода выполнили вместе третью часть всего данного им заказа, первый завод выпустил в 4 раза больше машин, чем второй. Сколько дней работал каждый завод и во сколько раз производительность второго завода больше производительности первого?

Ответ: 45 дней, 30 дней, в полтора раза.

18. Если завод, для выполнения срочного заказа, будет выпускать ежедневно по 20 плугов, то он не изготовит 100 плугов к установленному сроку. Если же завод будет выпускать по 23 плуга, то в назначенный срок выпустит на 20 плугов больше, чем заказано. Сколько плугов было заказано и какой срок был установлен для выполнения заказа?

Ответ: 900 плугов, 40 дней.

19. В бассейн проведены три трубы. Первая и вторая вместе наполнили бы его за 1 час 12 минут. Вторая и третья вместе - за 2 часа, а первая и третья вместе - за 1 час 30 минут. За какое время каждая труба отдельно может наполнить бассейн и за какое время наполнится он, если открыть одновременно все три трубы?

Ответ: 2 часа, 3 часа, 6 часов, 1 час.

20. Чтобы наполнить бассейн водой, открыли сначала одну трубу на 8 часов, а затем, не закрывая первой, открыли вторую, обе трубы закончили наполнение бассейна через 4 часа. Если бы вторую трубу открыли через 10 часов 30 минут после начала работы первой, то обе трубы закончили бы наполнение бассейна, через 3 часа. За сколько времени каждая труба, работая отдельно, наполнит весь бассейн?

Ответ: 18 часов, 12 часов.

21. Сосуд снабжен двумя кранами: через первый кран вода вливается, через второй - выливается. Если оба крана открыты одновременно, то каждый час в сосуде убывает 5 литров воды. Если первый кран будет открыт 2 часа, а второй на 3 часа больше, то через второй кран выльется на 40 литров воды больше, чем нальется через первый кран. За какое время через первый кран пройдет 50 литров воды?

Ответ: за 10 часов.

22. К бассейну присоединено четыре трубы. Если открыть первую, вторую и третью трубы, то бассейн наполнится через 12 часов. Если открыть вторую, третью и четвертую трубы, то бассейн наполнится за 20 часов. При открытии первой, третьей и четвертой труб - за 5 часов. При открытии первой, второй и четвертой - за 6 часов. За какое время наполнится бассейн, если открыть все трубы?

Ответ: За 6 часов.

23. В резервуаре, наполненном водой, открыли четыре крана. Через два часа, когда вылилась четвертая часть имевшейся в нем воды, первый кран закрыли. Через 4 часа, когда вылилось столько же воды, закрыли второй кран. Через 6 часов закрыли третий кран. После этого

за 10 часов вытекла вся оставшаяся вода, составляющая четверть всей воды, находившейся первоначально в резервуаре. За сколько часов может вылиться вся вода из резервуара через один открытый кран?

Ответ: 16 часов, 48 часов, 60 часов, 40 часов.

24. В сосуде имеется три крана. Через первый и второй краны вода вливается, через третий выливается. Один первый кран может наполнить сосуд за 10 часов, а один второй - за 15 часов. При совместном действии всех трех кранов, вода из полного сосуда выливается за 30 часов. Сосуд был полон, когда открыли первый и третий краны. Через 1 час после их открытия первый кран закрыли, но открыли второй. Еще через час закрыли третий кран, но открыли первый. Через сколько часов, после того как закрыли третий кран, сосуд наполнится?

Ответ: 1 час 24 минуты.

25. Из двух труб наполняют два бассейна, из которых второй вдвое больше первого. При наполнении первого бассейна вторая труба открывается да 26 минут позже первой, а закрываются обе трубы одновременно. В первый бассейн из первой трубы наливается в 4 раза больше воды, чем из второй. Затем те же две трубы наполняют второй бассейн, причем трубы начинают работать одновременно, кончает же работать вторая труба на 11 минут позже первой. В оба бассейна вместе из первой труба наливается столько же воды, сколько и из второй. Сколько минут всего работает каждая труба и во сколько раз производительность второй трубы больше производительности первой трубы?

Ответ: 60 минут, 45 минут, в 4/3 раза.

26. К сосуду присоединено три трубы, через первую и вторую вода вливается, через третью - выливается. Если через полчаса после совместной работы первых двух труб начинает работать третья труба, то сосуд наполняется через полтора часа совместной работы всех трех труб. Если после двух часов работы третьей трубы начинает работать вторая, то сосуд опорожняется после трех часов их совместной работы. При совместной работе первой и третьей труб сосуд наполняется за 3 часа 30 минут.
Определить производительность каждой трубы.

Ответ: Первая труба наполняет сосуд за 1 час 45 минут, вторая - за 7 часов, третья труба опорожняет сосуд за 3 часа 30 минут.

27. Колхоз должен был засеять 200 га к определенному сроку, но он засевал ежедневно на 5 га больше, чем намечалось по плану, и поэтому закончил сев на 2 дня раньше срока. За сколько дней был закончен сев?

Ответ: 8 дней.

28. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 кубометров дров. Первые 3 дня бригада выполняла

ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 кубометров дров сверх плана. Поэтому уже за день до срока было заготовлено 232 кубометра дров. Сколько дров в день должны была заготовить бригада лесорубов по плану?

Ответ: 24 кубометра.

29. Для перевозки 15 тонн овощей было затребовано несколько грузовиков определенной грузоподъемности. За неимением свободных грузовиков этой грузоподъемности гараж выслал грузовики с грузоподъемностью на полтонны меньше и дал таких грузовиков на один больше. Сколько тонн овощей взял каждый из высланных грузовиков?

Ответ: 2,5 тонны.

30. Двое рабочих, выполняя определенное задание вместе, смогли закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а, когда он выполнит половину всей работы, его сменит другой, то все задание будет выполнено за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности сможет выполнить все задание?

Ответ: 30 и 20 дней.

31. Два каменщика, из которых второй начинает работу на полтора дня позже первого, могут выложить стену за 7 дней. За сколько дней каждый из них отдельно смог бы выложить эту стену, если известно, что второй каменщик может выполнить ату работу на 3 дня быстрее, чем первый?

Ответ: 14 дней и 11 дней.

32. Для посева кукурузы колхоз выделил два участка земли. Площадь первого участка на 2 га меньше площади второго. При уборке урожая с каждого участка было собрано по 180 тонн кукурузы. Сколько тонн кукурузы было собрано с одного гектара на каждом участке, если урожай кукурузы на первом участке был на 3 тонны с гектара больше, чем на втором?

Ответ: 18 тонн и 15 тонн.

33. Для уборки урожая в определенный планом срок колхоз выделил две бригады. Первая бригада, работавшая на участке в 400 га, окончила уборку урожая на 2 дня раньше срока, а вторая бригада на участке в 900 га проработала на 2 дня больше срока. Если бы первая бригада проработала столько дней, сколько вторая, а вторая столько дней, сколько первая, то каждая бригада убрала бы поровну. Найти срок уборки урожая по плану и производительность каждой бригады в день.

Ответ: 10 дней, 50 га, 75 га.

34. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу t часов, причем один первый, работая отдельно, может выполнить ее на 4 часа скорее второго. За сколько времени может выполнить эту работу каждый из них, работая один?

Ответ: $t \pm 2 + \sqrt{t^2 + 4}$ часов.

35. Двум рабочим поручено было сделать по 72 изделия каждому. Первый рабочий делал в час на 2 изделия больше, чем второй, а

поэтому окончил работу на 3 часа раньше второго. Сколько изделий делал каждый рабочий в час?

Ответ: 8 и 6 изделий.

36. Чтобы сложить стену, два каменщика работали вместе 21 день и, сверх того, первый работал еще три дня. Сколько дней требуется каждому из них для выполнения всей работы, если второй каменщик может сложить стену на 7 дней дольше, чем первый?

Ответ: 42 дня и 49 дней.

37. При совместной работе двух тракторов различной мощности колхозное поле было вспахано за t дней. Если бы половину поля вспахать сначала одним трактором, а другую половину - вторым, то вся работа была бы закончена за k дней. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно?

Ответ: $k \pm \sqrt{k^2 - 2kt}$ дней, k>2t.

38. Для углубления фарватера поставлены три экскаватора. Если эту работу будет выполнять первый экскаватор, то он закончит работу на A дней позже, чем все три экскаватора вместе. Если же будет работать только второй, то он кончит ее на B дней позже, чем все вместе. Одному третьему экскаватору потребуется времени в C раз больше, чем при работе всех трех вместе. Сколько времени потребуется трем экскаваторам для совместного выполнения работы?

Ответ: $\dfrac{-(A+B)+\sqrt{(A-B)^2+4ABC}}{2(C+1)}$ C>1.

39. При рытье колодца, глубиной свыше 10 метров, за первый метр глубины платили 10 рублей, а за каждый следующий на 5 рублей больше, чем за предыдущий. Сверх того, за весь колодец было уплачено дополнительно 100 рублей. Средняя стоимость одного метра глубины оказалась равной 62 рубля 50 копеек. Определить глубину колодца.

Ответ: 20 метров.

40. Бассейн, имеет два крана. Через первый он наполняется, а через второй опорожняется на m минут быстрее, чем первый кран наполняет бассейн. Однажды, когда бассейн до половины был наполнен водой, открыли оба крана одновременно. Через n минут после этого бассейн опорожнился. Через сколько минут первый кран наполнит бассейн, а второй кран опорожнит бассейн, действуя отдельно?

Ответ: $\dfrac{\pm m + \sqrt{m^2 + 8mn}}{2}$ минут.

41. Перевозка одной тонны груза от пункта A до пункта B по железной пороге обходится на b копеек дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти из A в B по железной дороге на сумму S рублей, если водным путем на ту же сумму можно перевезти на k тонн больше, чем по железной дороге?

Ответ: $\dfrac{-kb + \sqrt{k^2 b^2 + 400kbS}}{2b}$ тонн.

42. На двух прямоугольных участках земли посажено рядами 350 плодовых деревьев, причем оказалось, что на каждом участке число рядов на больше числа деревьев в ряду. По скольку деревьев было посажено в каждом ряду, на каждом участке, если на первом из них было на 130 деревьев больше, чем на втором?

Ответ: 15 деревьев и 10 деревьев.

43. С первого участка земли собрали 4,8 тонн картофеля. Со второго участка, площадь которого на 0,03 га меньше площади первого, собрали 2 тонны картофеля. Причем, с одного квадратного метра второго участка собрали на 2 кг меньше, чем с одного квадратного метра первого участка. Какова площадь каждого участка и сколько картофеля собрали с одного квадратного метра того и другого участка?

Ответ: 800 квадратных метров, 6 килограмм; 500 квадратных метров, 5 килограмм или 900 квадратных метров, 16/3 килограмма, и 600 квадратных метров, 10/3 килограмма.

44. Сосуд имеет два крана А и В. Сосуд был полон, когда открыли кран А, а затем, когда из наполненного сосуда вытекло четверть всей воды, открыли кран В. Тогда остальная часть воды вытекла из сосуда через такое число часов, которое на один час больше времени работы одного крана А. Если же сосуд полон и открыть оба крана сразу, то он опорожнится на полчаса раньше, чем в первом случае. Вычислить время, необходимое каждому крану в отдельности для опорожнения наполненного сосуда.

Ответ: 5 часов и 7,5 часов.

45. Два простых плуга и один тракторный обрабатывают вместе некоторый участок земли за 6 дней. Восемь простых плугов выполнили бы эту работу на 2 дня быстрее, чем один тракторный. Во сколько раз производительность тракторного плуга больше производительности простого плуга?

Ответ: В 6 раз.

46. Для перенесения некоторого товара с одного места на другое нанято несколько рабочих, которые могут перенести весь товар за 10 часов. Если бы рабочих было на 10 больше и каждый переносил бы в час на 5 ящиков больше, то работа была бы закончена за 6 часов. Если бы рабочих было на 20 меньше и каждый бы переносил в час на 5 ящиков больше, то на выполнение всей работы ушло бы 15 часов. Сколько нанято рабочих и сколько, ящиков в час переносит один рабочий?

Ответ: 40 рабочих, 15 ящиков в час.

47. Сосуд, наполненный жидкостью, может быть опорожнен двумя кранами. Первый кран был открыт 2/3 того времени, которое понадобилось бы второму для опорожнения всего сосуда. Затем первый кран закрыли и сосуд был опорожнен вторым краном. Если бы с самого начала открыли оба крана, то сосуд опорожнился бы двумя часами раньше и из первого крана тогда вытекла бы только половина

того количества воды, которое прежде вытекло через второй кран. За какое время каждый кран в отдельности может опорожнить сосуд?

Ответ: 6 часов и 3 часа.

48. Бочка вместимостью 40 ведер, снабжена двумя кранами. Через первый кран вода вливается в бочку, а через второй кран вода выливается из бочки. Если бочку наполнить водой, а затем открыть оба крана, то через 10 минут в бочке останется 20 ведер воды. Столько же воды осталось бы в наполненной бочке через 3 минуты, если бы первый кран потратил для наполнения бочки на 1 минуту больше, а второй для опорожнения на 1 минуту меньше, чем им в действительности для этого требуется. За какое время один первый кран может наполнить пустую бочку? За какое время вода из полной бочки выльется через второй кран?

Ответ: 5 минут, 4 минуты.

49. Двое рабочих выполняют работу за 20. дней. Один за них, работая отдельно, затрачивает на эту работу на 30 дней меньше другого. За сколько дней может сделать эту работу каждый рабочий в отдельности?

Ответ: 30 дней, 60 дней.

50. Первая и вторая трубы наполняют бассейн емкостью в 260 литров, а третья и четвертая трубы наполняют бассейн емкостью 370 литров. Третья труба подает на 45 литров в минуту больше, чем первая, а четвертая вдвое больше, чем вторая. Все четыре трубы открываются одновременно. Первая, вторая и четвертая закрываются одновременно, но позже третьей, которая действует 2 минуты. При этом оба бассейна оказываются наполненными. Все четыре трубы вместе подают 200 литров воды в минуту. Сколько минут действовала первая труба?

Ответ: 4 минуты.

51. Резервуар, вместимость которого равна 5280 литров, был наполнен двумя трубами, из которых вода текла неодинаковое время. Первая труба давала каждую секунду на 2 литра больше второй. Если бы вторая труба давала в секунду столько, сколько первая, то из нее натекло бы 3400 литров, а если бы первая труба давала в секунду столько, сколько вторая, то из нее натекло бы 2048 литров. Сколько литров воды в секунду давала каждая труба?

Ответ: 8 литров в секунду, 10 литров в секунду или 28/21 литра в секунду и 170/21 литра в секунду.

52. Через два крана неодинакового сечения ванна, при совместном действии кранов, наполняется за m часов. Если бы половину ванны наполнить через один кран, а другую половину - через другой, то для наполнения ванны потребовалось бы t часов. За какое время ванна наполняется через каждый кран в отдельности?

Ответ: $t \pm \sqrt{t^2 - 2mt}$ часов, $t \geq 2m$.

53. Обработка детали требует двух операций, выполняемых в любом порядке. Рабочий четвертого разряда выполняет их

соответственно за 5 минут и 7 минут. Рабочий пятого разряда выполняет эти операции за 3 минуты и 4 минуты. Смогут ли один рабочий четвертого разряда и один рабочий пятого разряда совместно обработать 25 деталей за два часа?

Ответ: Смогут.

54. Трое рабочих могут совместно выполнить некоторую работу менее, чем на 30 минут. Первый из них, работая отдельно, может выполнить эту работу вдвое скорее третьего и на 1 час быстрее второго. Сколько, времени потребуется каждому, 'чтобы выполнить эту работу самостоятельно?

Ответ: Первому потребуется не более часа, второму и третьему не более двух часов.

55. Две машины, рывшие туннель навстречу друг другу, закончили проходку, проработав ровно 60 дней. Если бы первая машина работала 18 дней, а вторая 16 дней, то они прошли бы 60 метров туннеля. Если бы первая машина выполнила 2/3 всей работы второй по проходке туннеля, а вторая 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого не менее, чем на 6 дней больше, чем второй. Сколько метров туннеля проходит первая машина в день?

Ответ: Менее двух метров.

56. Три бригады должны изготовить некоторое количество деталей. Первая бригада делает по 200 деталей в день, вторая по 75 и третья по 825 деталей и день. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют 1/5 всей работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся 4/5 работа. Какое количество деталей было изготовлено, если общее время работы составило более 2 дней?

Ответ: более 1375 деталей.