Рудин В.Н., Рудина Е.И.

Графическое решение текстовых задач

(пособие для учителей и школьников)

Томск - 1995

Рудин В.Н., Рудина Е.И.

Графическое решение текстовых задач

(пособие для учителей и школьников)

Томск - 1995

Рудин В.Н., Рудина Е.И.
Учебное пособие по математике для учителей и учащихся.

Рецензент
Гулько С.П. - доктор ф.-м.наук

Издание Томского института повышения квалификации работников образования.
Ответственная за выпуск Колмакова В.П. - методист ТомскРО.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Графики в нашей жизни играют значительную роль. По графикам решают уравнения и находят объемы тел, расчитывают конструкторские и решают экономические задачи, вычисляют данные для запуска ракет и исследуют реальные процессы.

Но, несмотря на практическое значение графиков, в школьной математике графики играют в основном вспомогательную роль и служат обычно для иллюстрации и лучшего запоминания свойств изучаемых функций. Поэтому и отношение к графикам у учеников очень легкомысленное.

Рассматривая в данном пособии графические методы решения текстовых задач, мы хотим прежде всего обратить внимание на то, что:

1. Благодаря своей наглядности, графики позволяют лучше понять решаемую задачу.

2. График дает возможность сразу определить, есть ли у данной задачи решение и единственно ли оно. Если исходная задача может иметь несколько вариантов аналитического решения, то график помогает выбрать нужный вариант.

3. Графики помогают считать, так как заменяют вычисления по сложным формулам простыми действиями с чертежами. Решать задачи по графикам можно быстро и с достаточной для графики точностью.

4. Графики позволяют исследовать изучаемый процесс, подбирать данные и, тем самым, составлять новые интересные задачи.

При решении текстовых задач графическим способом у учеников возникает понимание необходимости аккуратного отношения к построению графиков, появляется умение работать с ними: правильно выбирать масштаб, производить простые геометрические построения.

В данном пособии рассматриваются задачи, решаемые обычно с помощью составления линейных уравнений или систем линейных уравнений. Графики в этом случае легко строить, так как ими являются отрезки прямых линий. Всего рассмотрено 78 задач. Все задачи разбиты на 3 группы по роду деятельности: задачи на движение, задачи на проценты и пропорции, задачи на совместную работу. Для контроля правильности графического решения в большинстве задач проводится решение арифметическим способом.

в § 1 мы обращаем внимание читателя на то, что всякому реальному движению можно поставить в соответствие график, который мы называем траекторией движения. Каждая точка этого графика определяется двумя значениями: временем движения объекта и расстоянием от некоторого исходного пункта А. Таким образом, рассматривая траекторию, мы можем установить на каком расстоянии находился объект в определенный момент времени, когда он изменил скорость движени, в каком направлении двигался, когда прибыл в пункт назначения. Различным движущимся объектом соответствуют различные траектории движения. По точкам пересечения траекторий можно определить когда и на каком расстоянии от пункта А объекты встречались. Эти и подобные им вопросы решаются в задачах второго параграфа. После каждой решенной задачи в виде упражнения приводится аналогичная задача для самостоятельного решения. Ответы к упражнениям даны в конце пособия.

Методы, изложенные в первых двух параграфах используются в § 3 и § 4 для решения задач, не связанных явно с движением: задач на проценты и пропорции, задач на совместную работу. В этих задачах графики характеризуют не зависимость расстояния от времени, а, например, количество покупаемого товара от величины заработной платы.

В пятом параграфе приведены различные задачи для самостоятельного решения.

Данное пособие не охватывает всего класса задач, решаемых графически. Мы не рассматривали, в частности, задач, графические решения которых приводят к сложным графическим построениям или к построению графиков нелинейных функций. Таких задач много и они очень интересны. Однако в школьной математике геометрическим построениям уделяется времени недостаточно для того, чтобы можно было применять их на практике.

Мы надеемся, что рассмотренные задачи помогут понять насколько разнообразны, необычны и интересны методы графического решения текстовых задач и привлекут к ним внимание.

Опыт изучения этой темы со студентами-педагогами и школьниками показал, что ученики, знакомые с методами графического решения задач, более осознанно подходят к решению задач на составление уравнений и лучше усваивают теоретический материал.

Решение задач на уроках информатики с построением графиков на экранах дисплеев персональных ЭВМ делает эти уроки более содержательными.

Авторы надеются, что данное пособие будет полезно и учителям и ученикам и заранее благодарят за все замечания, способствующие его улучшению.

§1. ТРАЕКТОРИИ

Предположим, что из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 100 км, в 8 часов утра выехал велосипедист. Двигаясь с постоянной скоростью, велосипедист в 12 часов находился на расстоянии 40 км от пункта A ...

Для того, чтобы наглядно представить себе движение велосипедиста, проделаем следующие построения:

1. Проведем вертикальную прямую. Эту прямую мы будем называть осью расстояний (рис.1). Отметим на ней произвольную точку A. Эта точка будет соответствовать пункту A. Выбрав масштаб 1 см $\leftrightarrow$ 20 км, разметим ось растояний вверх от точки A. Обозначим точку, находящуюся на расстоянии 100 км, буквой B. Она будет соответствовать пункту B.

2. Через точку A проведем горизонтальную прямую. На этой прямой мы будем откладывать время и называть ее осью времени. Так как в пункте A велосипедист находился в 8 часов утра, то отсчет времени удобнее начать с 8. Выбрав масштаб 1 см $\leftrightarrow$ 1 час, произведем разметку оси времени вправо от точки A.

3. Построим, для большей наглядности, такую же ось времени, проведя горизонтальную прямую через точку B.

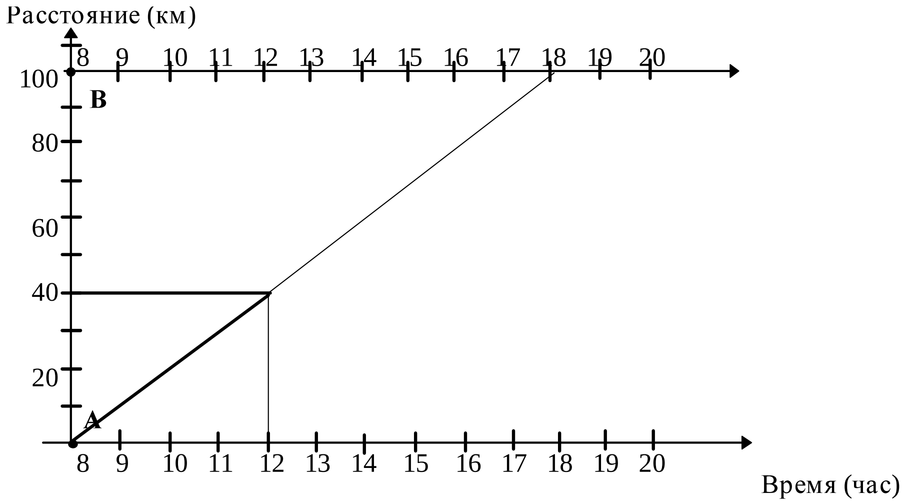

Рис.1.

Замечание 1. На оси расстояний не будет отрицательных расстояний, так как их нет в действительности. Все расстояния измеряются от точки A. Поэтому вниз от точки A расстояния тоже положительны.

Замечание 2. Реальное время меняется периодически от 0 до 24 часов. Поэтому разметка оси времени также будет периодической. Причем точку 24 часа будем обозначать нулем.

Проведем через точку 12 часов оси времени вертикальную прямую и через точку 40 км оси расстояний горизонтальную прямую. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой С. Эта точка соответствует тому, что велосипедист находился в 12 часов дня на расстоянии 40 км от пункта А. Наоборот, зная положение точки С, мы можем определить в какое время и на каком расстоянии находится велосипедист. Для этого нужно спроецировать точку С на ось времени и ось расстояний. Так как при равномерном движении путь прямо пропорционален времени движения, то движению велосипедиста до 12 часов дня будет соответствовать отрезок прямой линии, соединяющий точки А и С. Этот отрезок прямой АС назовем

траекторией движения велосипедиста до 12 часов дня. Таким образом, реальному движению велосипедиста соответсвует траектория его движения, изображаемая графически, в данном случае, отрезком прямой линии. Если после 12 часов дня велосипедист двигался дальше с той же скоростью, то, продолжив траекторию, мы определим, что в пункт В велосипедист приедет в 18 часов. Пусть нам дана траектория движения пешехода.

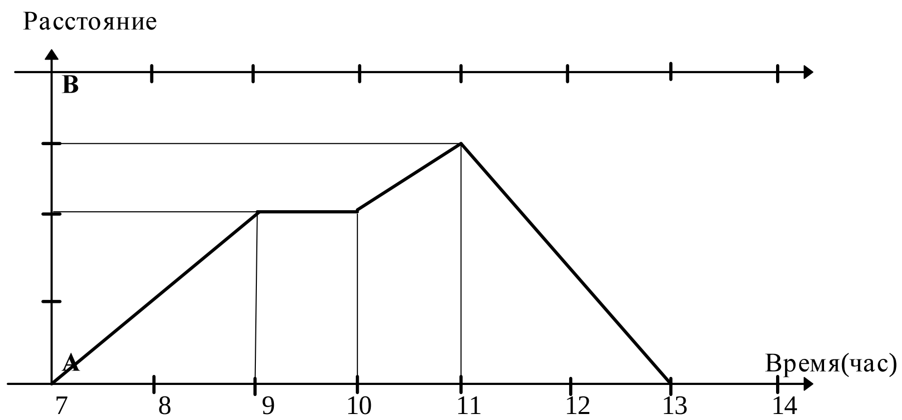

Рис.2.

Глядя на нее, легко понять, что пешеход вышел из пункта А в 7 часов утра и с постоянной скоростью шел до 9 часов. Затем он остановился и в течение одного часа никуда не шел. С 10 до 11 пешеход шел с прежней скоростью в направлении пункта В. В 11 часов он повернул назад и, увеличив скорость, вернулся в пункт А в 13 часов. Легко определить также, что пешеход повернул обратно, пройдя 3/4 всего пути.

Таким образом, всякому реальному движению соответствует траектория, изображаемая графически некоторой кривой. Однако, время движется только вперед и, значит, не вся-
кой кривой соответствует реальное движение. Для удобства понимания на траектории можно указывать стрелкой направление движения, допустимое по этой кривой.

Упражнения

1. Велосипедист выехал из пункта А в 8 часов утра и двигался со скоростью 10 км/час в направлении пункта В. Нарисовать траекторию его движения до 18 часов.

2. Имеется траектория движения автомобиля:

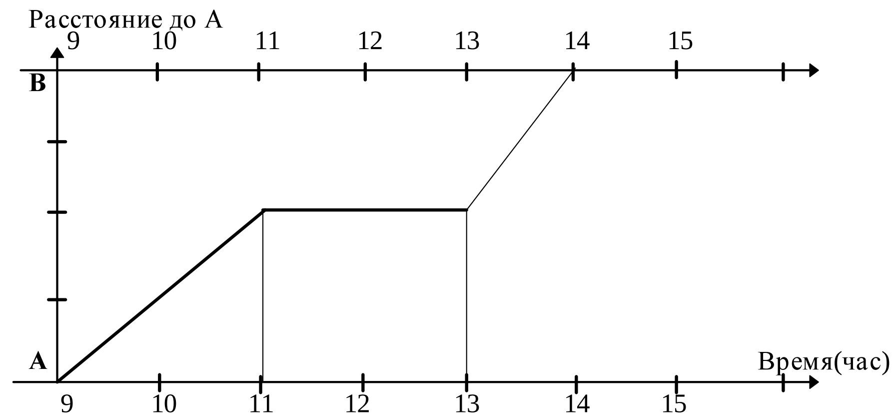

Рис.3

Определить:

а) за какое время автомобиль проехал половину пути от А до В?

б) с какой скоростью ехал автомобиль в 12 часов дня?

в) когда скорость движения автомобиля была меньше: в 10 часов или в 13 часов 30 минут и во сколько раз?

г) сколько всего времени затратил автомобиль на путь от А до В?

§ 2. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Используя траектории, мы можем решать задачи на движение. Рассмотрим некоторые из них. Во всех задачах на движение, если не оговорено противное, движение происходит в течение одного дня.

Задача 1. Из пунктов А и В навстречу друг другу с постоянными скоростями вышли два путника. Первый вышел из А и 7 часов и пришел в В в 13 часов. Второй путник вышел из В в 7 часов и пришел в А в 19 часов. В какое время путники встретились?

Решение

1. Посмотрим траектории движения путников. Расстояние от А до В неизвестно, поэтому на оси расстояний отложим любой отрезок, например, 7,5 см (рис.4). По оси времени возьмем масштаб: 1 см ↔ 1 час.

2. Соединив отрезком прямой точки начала и конца пути каждого путника, получим траектории их движения. Точка пересечения этих траекторий, которую мы обозначим буквой С, соответствует моменту встречи.

3. Спроецировав точку С на ось времени, получим время встречи - 11 часов.

Следовательно, встреча путников произойдет в 11 часов того же дня. Так, не производя никаких вычислений, мы быстро получим ответ на вопрос задачи.

Если есть сомнение в том, что ответ получен точно, то можно решить эту задачу, составив соответствующую систему уравнений или использовать арифметический способ решения.

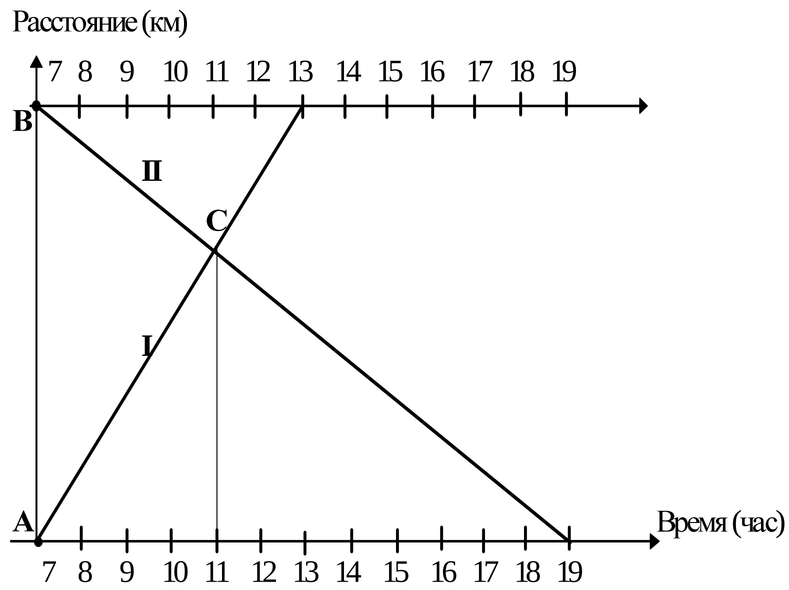

Рис.4.

В данном пособии мы не будем решать задачи с помощью уравнений и систем уравнений. Любителей такого способа решения задач мы отсылаем к пособию [1], в котором подробно рассказано, как это делается.

Найдем точное решение данной задачи, используя арифметический способ решения подобных задач.

1. Заметим, что первый путник был в пути 6 часов, а второй - 12 часов.

2. Предположим, потому, что весь путь от А до В составляет 12 условных единиц.

3. Скорость первого путника равна 12 : 6 = 2 у.е./час; второго - 12 : 12 = 1 у.е./час.

4. Скорость сближения путников 2 + 1 = 3 у.е./час.

5. Встреча произойдет через 12 : 3 = 4 часа после начала их движения. Так как путники вышли в 7 часов, то встреча произойдет в 11 часов.

Ответ: встреча путников произойдет в 11 часов дня.

Упражнение 1. Из пунктов А и В навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Первый выехал из А в 8 часов и приехал в В в 16 часов. Второй мотоциклист выехал из В в 8 часов и приехал в А в 20 часов. В какое время мотоциклисты встретились?

Задача 2. Из пунктов А и В навстречу друг другу вышли два путника. Первый вышел из пункта А в 8 часов и пришел в пункт В в 17 часов. Второй вышел из пункта В в 9 часов и пришел в пункт А в 20 часов. Успели ли путники встретиться до 13 часов?

Решение

1. Нарисуем траектории движения путников (рис.5).

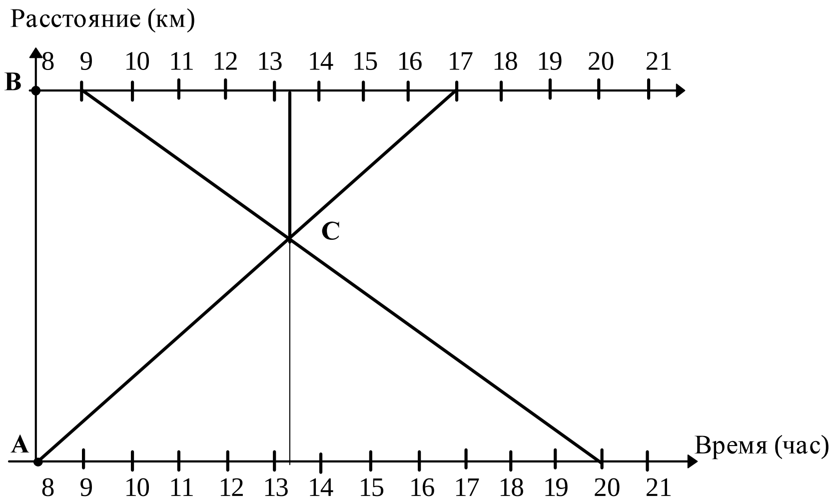

Рис.5.

2. Спроецировав точку С пересечения траекторий на ось времени, получим время встречи путников. Оно приближенно равно 13,4 часа. Мы не можем утверждать, что точно нашли время, но на вопрос задачи мы можем ответить однозначно: до 13 часов путники встретиться не успеют.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Первый путник был в пути 9 часов; второй - 11 часов.

2. Весь путь от А до В будем считать равным 99 условным единицам.

3. Скорость движения первого путника равна
99 : 9 = 11 у.е./час;
второго - 99 : 11 = 9 у.е./час.

4. До 9 часов первый путник двигался один и прошел 11 у.е. пути. В 9 часов расстояние между путниками было равно 99 - 11 = 88 у.е.

5. Скорость сближения путников после 9 часов равна 9 + 11 = 20 у.е./час.

6. Время движения до встречи 88 : 20 = 4,4 часа.

7. Время встречи 9 + 4,4 = 13,4 часа.

Ответ: до 13 часов путники встретиться не успеют.

Замечание 1. Точность графического решения зависит, в частности, от того какое расстояние мы откладываем по оси расстояний. Лучше всего брать такой масштаб, чтобы траектории были перпендикулярны друг другу.

Упражнение 2. Из А в В навстречу друг другу выехали два поезда. Первый поезд выехал из А в 7 часов и прибыл в В в 15 часов. Второй поезд выехал из В в 9 часов и прибыл в А в 16 часов. Успеют ли машинисты поездов при встрече поприветствовать друг друга гудками до полудня?

Задача 3. Два путника вышли из А и В навстречу друг другу. Первый путник вышел из А в 7 часов и пришел в В в 17 часов. Второй путник вышел из В в 8 часов. Когда второй путник пришел в А, если путники встретились ровно в полдень?

Решение

1. Нарисуем траектории движения путников (рис.6). Траекторию движения второго путника построим, если нарисуем точку встречи. Для этого из точки 12 оси времени проведем вертикальную прямую до пересечения с траекторией первого путника. Отметим это пересечение точкой С.

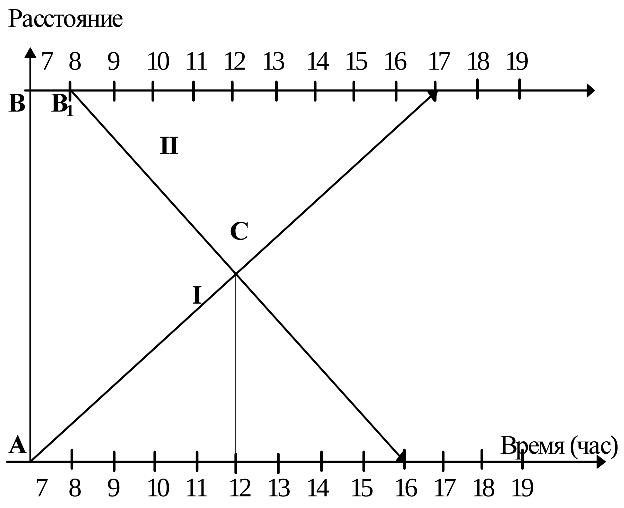

Рис.6.

2. Проведя прямую через точку B_1, соответствующую начальному положению второго путника, и точку С до пересечения с нижней осью времени, мы определим время прихода второго путника в пункт А. По графику видно, что это время равно 16 часов.

Проверим этот ответ, решив задачу арифметическим способом.

1. Первый путник был в пути 17 - 7 = 10 часов.
2. Путь от А до В будем считать равным 40 у.е.
3. Скорость движения первого путника 40 : 10 = 4 у.е./час.

До встречи первый путник шел 12 - 7 = 5 часов и прошел 20 у.е.

4. Второй путник прошел до встречи 40 - 20 = 20 у.е. пути за 12 - 8 = 4 часа.
5. Скорость второго путника 20 : 4 = 5 у.е./час.
6. Весь путь в 40 у.е. второй путник пройдет за 40 : 5 = 8 часов.

Значит, он придет в В в 16 часов.

Ответ: второй путник пришел в А в 16 часов.

Упражнение 3. Из городов А и В навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Первый выехал из А в 9 часов утра, планируя приехать в город В в 21 час. Второй выехал из В в 8 часов. В какое время второй мотоциклист приедет в город А, если мотоциклисты встретились в 15 часов?

Задача 4. Два путника вышли из А в В навстречу друг другу. Первый путник вышел из В в 8 часов и пришел в А в 19 часов. Второй путник вышел из А в 10 часов. Успеет ли второй путник до полуночи прийти в пункт В, если встретились путники в 15 часов?

Решение

1. Построим траектории движения путников, выбрав удобный масштаб на оси времени и начав отсчет от 8 часов. Для построения траектории движения второго путника найдем сначала точку С, соответствующую встрече на траектории первого путника.

2. Через точку A_1, соответствующую начальному положению второго путника, и точку С, проводим прямую до пересечения с верхней осью времени (рис.7). По графику мы видим, что второй путник придет в пункт В приблизительно в 23 часа 45 минут. Этого достаточно, чтобы однозначно ответить на вопрос задачи: второй путник успеет до полуночи прийти в пункт В.

Найдем теперь точное решение задачи арифметическим способом.

1. Первый путник находился в пути 19 - 8 = 11 часов.
2. Весь путь от А до В примем за 55 у.е. Тогда скорость пер вого путника равна 55 : 11 = 5 у.е./час.

3. До встречи первый путник прошел за 15 - 8 = 7 часов расстояние в 35 у.е. Ему осталось пройти 55 - 35 = 20 у.е. пути.
4. Второй до втречи шел 15 - 10 = 5 часов и прошел 20 у.е. пути. Следовательно, скорость его движения равна 20 : 5 = 4 у.е./час.
5. Весь путь второй путник пройдет за 55 : 4 = 13 и 3/4 часа, поэтому он придет в пункт А в 23 часа 45 минут.

Ответ: второй путник успеет до полуночи прийти в пункт В.

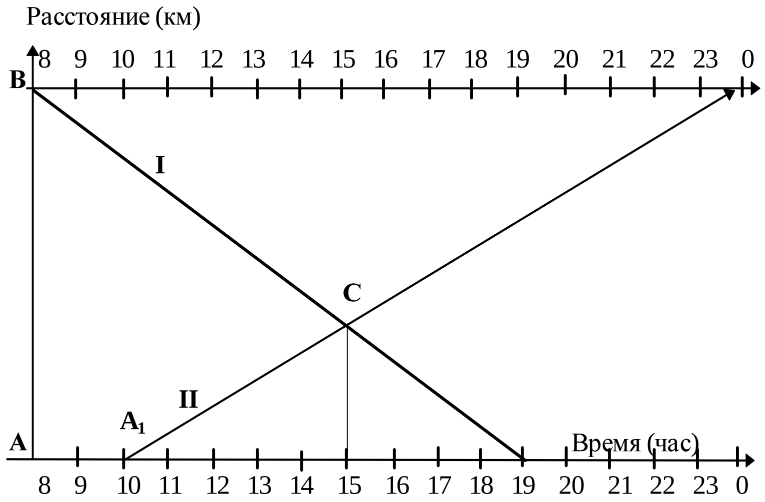

Рис.7.

Упражнение 4. Первый турист приехал в 8 часов утра на поезде в город А и пошел с вокзала в селение В, планируя прийти туда в 17 часов. В 9 часов из селения в город А вышел второй турист. Успеет ли второй турист на поезд, отходящий из города А в 20 часов, если встреча туристов произошла в 14 часов?

Задача 5. В 8 часов утра из пункта А в пункт В вышел путник, планируя прийти туда в 21 час. В 9 часов утра того же дня из пункта В вышел второй путник, планируя прийти в пункт А в 19 часов. В 11 часов первый путник сделал непредвиденную остановку на 2 часа и, увеличив скорость, пришел в пункт В, как и планировал, в 21 час. На сколько раньше встретились бы путники, если бы первый путник шел без остановок?

Решение

1. Нарисуем траектории движения путников (рис.8).

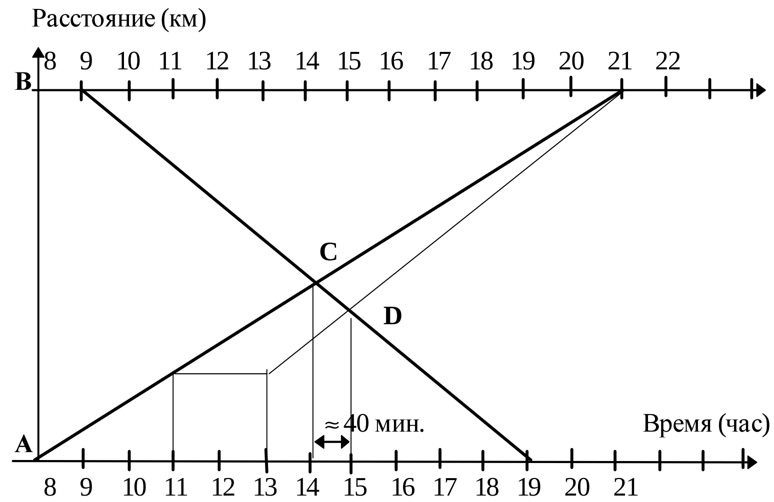

Рис.8.

На рисунке пунктиром изображена траектория с учетом двухчасовой остановки. С - планируемая точка встречи, D - действительная точка встречи.

2. Спроецировав точки С и D на ось времени, можно заметить, что встреча произойдет действительно позже и приблизительно на 40 минут.

Найдем точное решение задачи, заметив предварительно, что, не видя траекторий движения, мы не можем определенно сказать, повлияла ли остановка первого путника на время встречи. Ведь принципиально возможны три случая: встреча произошла до остановки, встреча произошла во время остановки, встреча произошла после остановки. Если мы не рисуем траекторий, то должны рассматривать решение для каждого случая. При этом, в двух случаях из возможных трех решения не будет. Найдем точное решение задачи арифметическим способом, используя график траекторий. Рассчитаем сначала время встречи, если движение происходило так, как было запланировано.

1. Первый путник шел 13 часов, второй 10 часов.
2. Предположим, что весь путь равен 130 у.е.
3. Тогда скорость первого равна 10 - у.е./час, второго - 13 у.е./час.
4. До 9 часов первый путник шел один и прошел 10 у.е. пути. Ему осталось пройти 120 у.е. пути.
5. Скорость сближения путников после 9 часов равна
$10 + 13 = 23$ у.е./час.
6. Время движения до встречи $120 : 23 = 5\frac{5}{23}$ часа, поэтому время встречи равно $14\frac{5}{23}$ часа или приблизительно 14 часов 13 минут.

Рассчитаем теперь время действительной встречи.

1. До 13 часов первый путник шел 3 часа и прошел 30 у.е. пути. Ему осталось еще пройти 100 у.е. пути за 8 часов. Значит, скорость его движения после остановки равна
$100 : 8 = 12{,}5$ у.е./час.
2. До 13 часов второй путник шел 4 часа и прошел 52 у.е. пути.
3. В 13 часов расстояние между первым и вторым путниками было равно $130 - 30 - 52 = 48$ у.е. пути.
4. Скорость сближения путников после 13 часов равна 25,5 у.е./час.
5. Время движения до встречи после 13 часов равно
$48 : 25{,}5 = 1\frac{15}{17}$ часа или приблизительно 1 час 53 минуты.

Встреча путников произойдет приблизительно в 14 часов 53 минуты. Таким образом, реальная встреча произошла позже планируемой на 260/391 часа или приблизительно на 40 минут.

Ответ: путники встретились бы раньше приблизительно на 40 минут.

Заметим, что в данной задаче и точное решение дает ответ, который неудобно использовать реально.

Упражнение 5. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу из городов А и В. Первый велосипедист выехал в 7 часов утра и планировал приехать в город В в 16 часов. Второй велосипедист выехал в 9 часов утра из В и планировал приехать в А в 14 часов. В 11 часов 30 минут первый велосипедист сделал остановку на 30 минут. На сколько изменилось время встречи велосипедистов?

Упражнение 6. Два мотоциклиста выехали из городов А и В навстречу друг другу. Первый выехал из А в 8 часов и планировал приехать в В в 17 часов. Второй мотоциклист выехал из В в 9 часов и приехал в А в 18 часов. На сколько позже встретились мотоциклисты, если первый мотоциклист сделал остановку с 12 часов 30 минут до 14 часов?

Задача 6. Два путника вышли навстречу друг другу из пунктов А и В. Первый вышел из А в 9 часов, планируя прийти в В в 21 час. Второй вышел из В в 8 часов, планируя прийти в А в 22 часа. На сколько позже произошла их встреча, если первый путник сделал остановку в 13 часов продолжительностью в 1 час, а второй - в 14 часов продолжительностью тоже в 1 час? Известно, что после остановки каждый путник увеличил скорость движения и пришел в конечный пункт в запланированное время.

Решение

1. Нарисуем траектории движения путников. Пунктиром проведем измененные в связи с остановками участки траекторий.

Точка C - точка запланированной встречи. Точка D - точка реальной встречи.

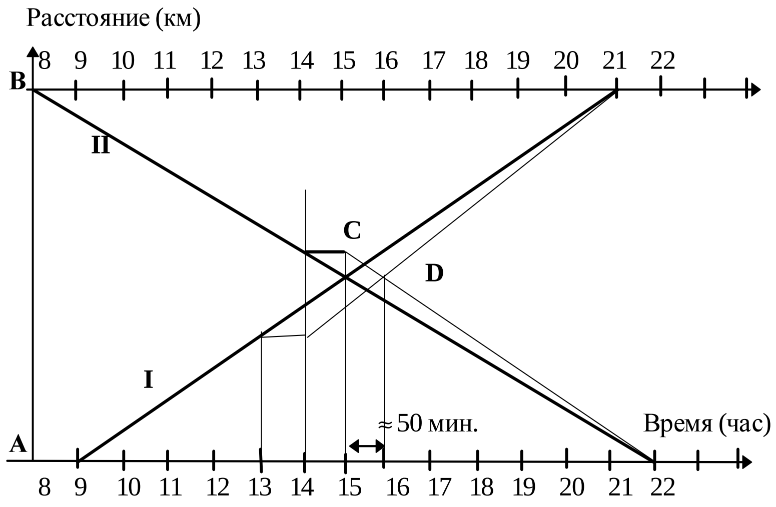

Рис.9.

2. Спроецировав точки C и D на ось времени, найдем время запланированной встречи и время реальной встречи. Путники должны были встретиться в 15 часов, а встретились приблизительно в 15 часов 50 минут. Таким образом, встреча путников произошла приблизительно на 50 минут позже, чем должна была произойти.

Решим эту задачу арифметическим способом, глядя на график траекторий. Найдем сначала время запланированной встречи.

1. Первый путник был в пути 12 часов, а второй - 14 часов.
2. Предположим, что весь путь равен 84 у.е.
3. Тогда скорость первого путника равна 7 у.е./час, второго - 6 у.е./час.
4. До 9 часов второй путник прошел 6 у.е. пути. Ему осталось пройти 78 у.е.
5. Скорость сближения путников 7 + 6 = 13 у.е./час.
6. Время движения до встречи после 9 часов равно 78 : 13 = 6 часов. Значит, время встречи путников 15 часов.

Найдем теперь время действительной встречи.

1. До 14 часов первый путник шел 4 часа и прошел 28 у.е. пути. Ему осталось пройти 56 у.е. за 7 часов. Следовательно, скорость движения первого путника после остановки равна 56 : 7 = 8 у.е./час.
2. До 15 часов первый путник прошел всего 28 + 8 = 36 у.е. пути.
3. До 15 часов второй путник шел 6 часов и прошел 36 у.е. пути. Ему осталось пройти 48 у.е. пути за 22 - 15 = 7 часов. Скорость движения второго путника после остановки равна

$48 : 7 = 6\frac{6}{7}$ у.е./час.

4. В 15 часов расстояние между путниками было равно 84 - 36 - 36 = 12 у.е. пути.
5. Скорость сближения путников после 15 часов равна

$14\frac{6}{7}$ у.е./час.

6. Время до встречи после 15 часов равно $12 : 14\frac{6}{7} = \frac{21}{26}$ часа или приблизительно 48,5 минут. Значит, путники встретились в 15 часов 48,5 минут.

Таким образом, встреча произошла позже, чем было запланировано, на 48,5 минут.

Ответ: Встреча произошла позже на 48,5 минут.

Замечание 1. Арифметическим способом мы получили решение более точно. Однако график избавил нас от необходимости рассматривать все девять случаев принципиально возможных в данной ситуации.

Упражнение 7. Из города А в 7 часов утра выехал автобус, планируя приехать в город В в 19 часов. В 9 часов утра из города В выехал грузовой автомобиль с целью: доставить груз в город А в 17 часов. На сколько позже произошла встреча грузового автомобиля с автобусом, если грузовой автомобиль сделал непредвиденную остановку в 12 часов продолжительностью в 1 час, а автобус сделал остановку в 12 часов 30 минут продолжительностью в 2 часа? После остановки движение продолжалось с прежней скоростью.

Задача 8. Из пункта А в 7 часов вышел путник, планируя прийти в пункт В в 15 часов. В 8 часов из пункта С. расположенного на середине пути между А и В, в направлении пункта А вышел второй путник. Встреча путников произошла в 10 часов. В какое время первый путник догонит второго, если второй путник пойдет с той же скоростью не в пункт А, а в пункт В?

Решение

1. Нарисуем траекторию движения первого путника и отметим на ней точку встречи М (рис.10).
2. Через точку С, взятую в середине отрезка АВ, проведем дополнительную ось времени и отметим на ней точку D, соответствующую начальному положению второго путника.
3. Через точки D и М проведем прямую, отрезок которой DK дает траекторию движения второго путника до пункта А.
4. Заметив, что в пункт А, а значит и в пункт В второй путник придет в 16 часов, построим его траекторию движения в пункт В.
5. Обозначив через N точку новой встречи путников и проецировав ее на ось времени, получим ответ на вопрос задачи: 14 часов.

Т.е. первый путник догонит второго на пути к пункту В в 14 часов.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Первый путник был в пути 8 часов.
2. Предположим, что весь путь от А до В равен 16 у.е. пути.
3. Скорость первого путника 2 у.е./час, до встречи он шел 3 часа и прошел 6 у.е. пути.
4. Второй путник до встречи шел 2 часа и прошел 8 - 6 = 2 у.е. пути.
5. В 8 часов расстояние между путниками было равно 8 - 2 = 6 у.е.
6. Первый путник догоняет второго со скоростью 1 у.е./час и ему потребуется 6 часов для того, чтобы догнать его. Значит первый путник догонит второго на пути к В в 14 часов.

Ответ: первый путник догонит второго в 14 часов.

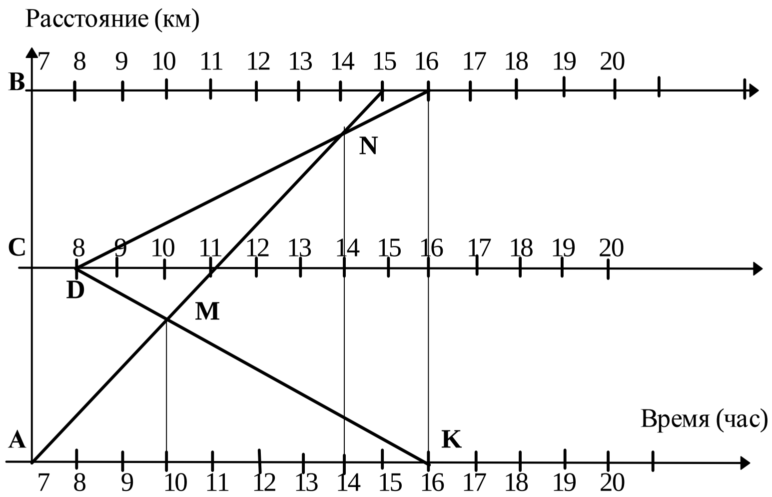

Рис.10.

Упражнение 8. Из города А в город В выехал мотоциклист. Из города С, находящегося на середине пути между А и В в 8 часов утра с одинаковой скоростью выехали два велосипедиста, один поехал в город А, а другой - в город В. Мотоциклист встретил первого велосипедиста в 11 часов и догнал второго в 17 часов. За какое время преодолел мотоциклист путь от А до В, если второй велосипедист приехал в В в 19 часов? Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

Упражнение 9. Из города А в 7 часов выехал велосипедист, планируя приехать в город В в 15 часов. В 8 часов утра из города С, находящегося от А на расстоянии трети всего пути АВ, вышел турист в направлении города А. Велосипедист и турист встретились в 9 часов. В какое время велосипедист догонит туриста, если турист пойдет не в город А, а в город В с той же скоростью, с какой он шел в город А?

Задача 9. Два автомобиля, выезжая одновременно из двух городов навстречу друг другу, могут встретиться через 7 часов. Скорости автомобилей относятся как 7 : 5. На сколько часов позже второго автомобиля должен выехать первый автомобиль, чтобы их встреча произошла ровно на середине пути между городами?

Решение

1. Построим траектории движения автомобилей (рис.11). По оси расстояний отложим отрезок, например, 6 + 6 = 12 у.е. Считая, что автомобили начали движение в 0 часов, разметим ось времени. Проведем дополнительную ось времени через точку, соответствующую середине пути.

2. Из точки 7 нижней оси времени проведем вертикальную прямую и отложим на ней вверх 7 у.е. Полученная точка С есть точка встречи, так как к моменту встречи первый автомобиль проедет 7 у.е. пути из 12, а второй только 5 у.е.

3. Соединим точку С прямой с точками А и В, соответствующими начальным положениям автомобилей.

4. Точку пересечения траектории второго автомобиля с осью времени, проведенной из точки, соответствующей середине пути между городами, обозначим через D.

5. Проведя через точку D прямую, параллельную траектории первого автомобиля до пересечения с нижней осью времени, прочитаем на оси необходимое время задержки. Оно приблизительно равно 2,4 часа.

Заметим, что если на оси времени масштаб равен 1 см ↔ 1 час, то для нахождения ответа на вопрос задачи достаточно просто измерить в сантиметрах расстояние между точками К и D пересечения траекторий путников со средней осью времени.

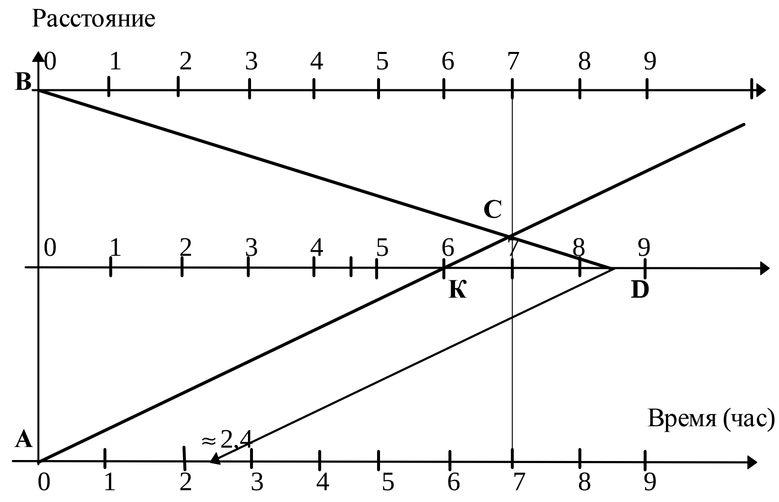

Рис.11.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Пусть скорость первого автомобиля равна 7 у.е./час, скорость второго автомобиля равна 5 у.е./час.

2. Тогда расстояние между городами равно (5 + 7)· 7 = 84 у.е.

3. Половину пути - 42 у.е. второй автомобиль проходит за 8,4 часа. Первый автомобиль проходит это расстояние за 6 часов.

4. Первый автомобиль затрачивает на этот путь на 2,4 часа меньше, т.е. чтобы встретить второй автомобиль на середине пути, он должен выехать на 2,4 часа позже.

Ответ: первый автомобиль должен выехать позже второго на 2,4 часа.

Упражнение 10. Два велосипедиста, выехав одновременно из двух селений А и В навстречу друг другу, встретились через 4 часа. Скорости велосипедистов относятся как
4 : 5. На сколько часов позже второго велосипедиста должен выехать первый, чтобы их встреча произошла на расстоянии одной трети пути от А к В?

Задача 10. Два путника вышли одновременно из пункта А в пункт В. Один из них шел со скоростью 6 км/час, а другой шел со скоростью 4 км/час. Через какое время и на каком расстоянии от пункта А первый путник должен повернуть обратно, чтобы встретить второго ровно через 3 часа после выхода их из пункта А?

Решение

1. Нарисуем траектории движения путников, предполагая, что путники начали движение в 0 часов (рис.12).
2. Из точки 3 оси времени проводим вертикаль до пересечения с траекторией движения второго путника. Точка пересечения, которую мы обозначим буквой С, соответствует месту встречи путников.
3. Двигаясь из точки С со скоростью первого путника, предположив при этом, что время течет в обратном направлении, мы можем восстановить траекторию, по которой первый путник придет в С.
4. Пересечение двух нарисованных траекторий движения первого путника даст нам точку D, соответствующую моменту поворота первого путника.
5. Спроецировав точку D на оси, получим время и место поворота. В данном случае первый путник должен повернуть назад через 2,5 часа после выхода на расстоянии 15 км от пункта А.

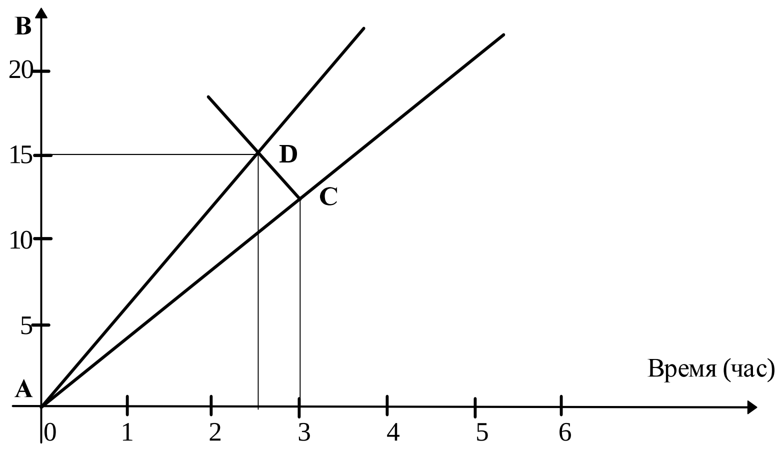

Рис.12

Решим задачу арифметическим способом.
1. За три часа второй путник пройдет 12 км.
2. Первый путник пройдет за 3 часа 18 км.
3. Первый путник прошел лишние 6 км, так как шел от точки встречи до точки поворота и обратно. Значит точка встречи находится на расстоянии 3 км от точки D.
4. Расстояние от А до D равно 15 км. Это расстояние первый путник пройдет за 2,5 часа.

Ответ: первый путник должен повернуть обратно через 2,5 часа после выхода из пункта А на расстоянии 15 км от него.

Упражнение 11. Велосипедист выехал со скоростью 20 км/час из города А. Через один час вслед за ним выехал второй велосипедист, движущийся со скоростью 15 км/час. Через какое время и на каком расстоянии от А первый велосипедист должен повернуть назад, чтобы, двигаясь с прежней скоростью, встретиться со вторым велосипедистом через 5 часов после своего выезда из города А?

Упражнение 12. Из пункта А в пункт В в 6 часов утра со скоростью 15 км/час выехал велосипедист. Через некоторое время вслед за ним со скоростью 30 км/час выехал мотоциклист. Догнав велосипедиста, мотоциклист повернул назад к пункту А. Приехав в пункт А, мотоциклист опять повернул и с прежней скоростью поехал к пункту В. В пункт В мотоциклист приехал через 40 минут после того, как второй раз догнал в 10 часов утра велосипедиста. Чему равно расстояние между пунктами А и В? Через какое время вслед за велосипедистом выехал мотоциклист? На сколько минут позже мотоциклиста в пункт В приехал велосипедист?

§ 3. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ И ПРОПОРЦИИ

Методы, изложенные в предыдущих двух параграфах мы можем применять при решении задач, не связанных с движением каких-либо объектов.

Задача 1. Заработок рабочего понизился на 20%, а цены на товары выросли в среднем на 25%. На сколько процентов меньше товаров, чем прежде, может теперь купить рабочий?

Решение

1. По вертикальной оси будем откладывать зарплату рабочего в процентах от прежней зарплаты (рис.13).

2.По горизонтальной оси мы будем откладывать количество товаров, которое может купить рабочий в процентах к прежнему количеству.

3. Точку, соответствующую 100% товаров и 100% зарплаты, обозначим через С. Соединив точку С с началом координат, получим график покупательской способности рабочего. Отметив любую точку графика и спроецировав ее на оси, мы можем узнать, какое количество зарплаты необходимо потратить на приобретение данного количества товаров и наоборот, какое количество товаров можно приобрести за данное количество зарплаты.

4. Зарплата уменьшилась на 20%, поэтому через точку 80% оси зарплаты проведем горизонтальную прямую, устанавливающую новый уровень зарплаты.

5. Цены выросли на 25%. Значит для того, чтобы купить 100% товаров, нужно потратить 125% первоначальной зарплаты. Точка D соответствует этой ситуации. Соединив точку D с началом координат, мы получим график новой покупательской способности рабочего.

6. Пересечение этого графика с новым уровнем зарплаты даст точку М. Спроецировав точку М на горизонтальную ось, прочитаем число, равное количеству товаров в процентах, которое можно теперь купить. Это число равно приблизительно 64%. Таким образом, в новой ситуации рабочий может купить только 64% того количества товаров, которое он мог купить прежде.

Заметим, что если мы выберем масштаб на горизонтальной оси 1см $\leftrightarrow$ 10%, то для нахождения ответа достаточно измерить в миллиметрах расстояние от точки М до вертикальной оси.

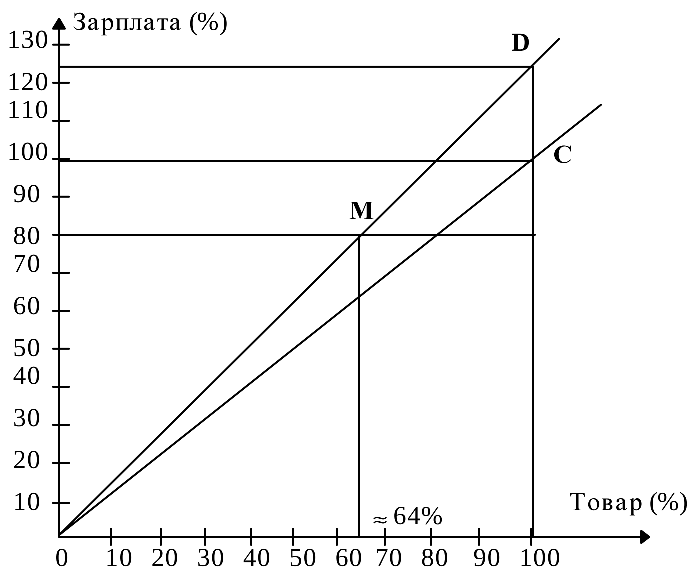

Рис.13

Решим теперь эту задачу арифметическим способом.
1. Примем зарплату рабочего за 100 условных единиц, а стоимость товаров за 4 условные единицы.
2. Прежде рабочий мог купить 100 : 4 = 25 единиц товаров.
3. Новый заработок рабочего составляет 80 у.е. зарплаты.
4. Новая цена товара равна 5 у.е. цены.
5. Рабочий может купить теперь 80 : 5 = 16 у.е. товаров.
6. Это количество составляет 16 : 25 · 100 = 64% от прежнего количества товара, т.е. на 36% меньше.

Ответ: рабочий может купить теперь товаров на 36% меньше, чем раньше.

Упражнение 1. Сосуд наполняется глицерином. Вследствие неисправности насоса скорость поступления глицерина в сосуд уменьшилась на 60%. На сколько процентов вследствие этого увеличится время наполнения сосуда?

Задача 2. Один сплав содержит металлы в отношении 1 : 5, другой сплав содержит эти же металлы в отношении 5 : 7. В какой пропорции нужно взять первый и второй сплавы, чтобы получить сплав, содержащий те же металлы в отношении 1 : 3?

Решение

1. По вертикальной оси будем откладывать вес сплава в условных единицах (рис.14). По горизонтальной оси будем откладывать вес первого металла в тех же условных единицах. Для удобства масштаб на горизонтальной оси возьмем крупнее, например, в 3 раза.

2. Первый металл в первом сплаве составляет 1/6 часть. Взяв по горизонтали 1 у.е., а по вертикали 6 у.е., получим точку С. Проведем через точку С и начало координат прямую. Эта прямая будет характеризовать первый сплав. Взяв произвольную точку на этой прямой и спроецировав ее на оси, мы определим сколько условных единиц весит весь сплав и сколько условных единиц составляет в нем вес первого металла.

3. Взяв по горизонтали точку 5 и по вертикали точку 12, получим точку D. Соединив ее прямой линией с началом координат, получим график, характеризующий второй сплав.

4. Построив точку с координатами (1, 4) и проведя через нее и начало координат прямую, получим характеристику третьего сплава.

5. Из любой точки вертикальной оси, например, на уровне точки D, проведем горизонтальную прямую, пересекающую характеристики в точках M, N и D. Отношение длины отрезка ND к длине отрезка MN даст пропорцию, в которой нужно взять сплавы I и II соответственно. так как в данном случае отрезок ND в 2 раза больше отрезка MN, то необходимо взять 2 части первого сплава и 1 часть второго сплава.

Подсчитать пропорцию можно, спроецировав отрезки на горизонтальную ось и подсчитав число делений на ней. Можно просто измерить отрезки линейкой.

Замечание 1. Нетрудно убедиться в том, что если прямая, характеризующая третий сплав, не находится на графике между двумя остальными прямыми, то получить этот сплав из первых двух невозможно.

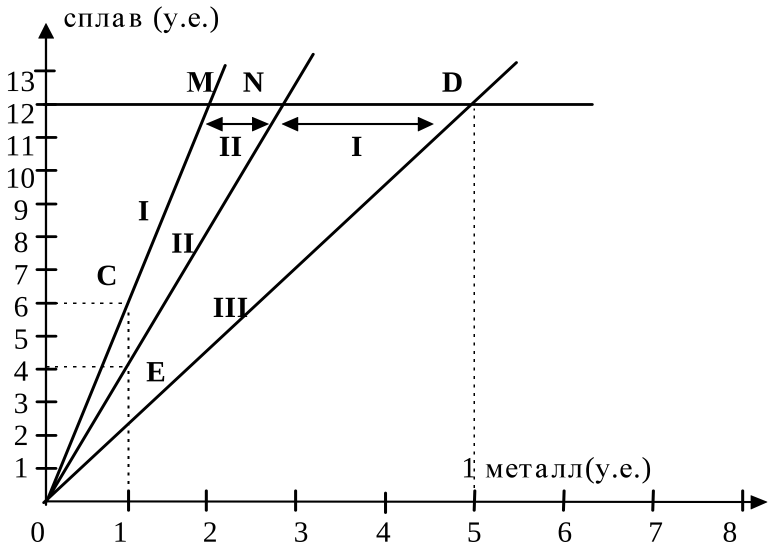

Рис.14.

Решим задачу арифметическим способом.

1. В третьем сплаве первый металл составляет 1/4 = 3/12 всего сплава.
2. В первом сплаве первый металл составляет 1/6 = 2/12 части, т.е. меньше на 1/12, чем нужно.
3. Во втором сплаве первый металл составляет 5/12 частей всего сплава, т.е. на 2/12 части больше, чем нужно.
4. Взяв 12 у.е. второго сплава, мы получим первого металла больше на 2 условные единицы, чем нужно. Для того, чтобы компенсировать этот излишек первого металла, мы должны взять 24 у.е. первого сплава, в котором будет недостаток 2 у.е. первого металла. Значит, на каждую часть второго сплава нужно брать две части первого.

Ответ: сплавы необходимо брать в пропорции 2 : 1.

Упражнение 2. Пшеницей засеяно 50% первого поля и 40% площади второго поля. При этом посев пшеницы составляет 44% общей площади. Какую часть общей площади составляет площадь первого поля?

Задача 3. Отец предполагал разделить некоторую сумму денег между сыном и дочерью в отношении 2 : 3, но потом передумал и разделил ее в отношении 7 : 3. В результате сын получил на 15000 рублей больше, чем предполагалось. Какова была сумма и сколько получил каждый?

Решение

1. По вертикальной оси будем откладывать общую сумму денег в тысячах рублей, а по горизонтальной оси будем откладывать количество денег, получаемое сыном. Масштаб по горизонтали для наглядности возьмем в два раза крупнее (рис.15).

2. Зная, что при первом способе раздела сыну полагалось 2/5 всех денег, построим прямую ОС, характеризующую этот способ раздела.

3. При втором способе раздела сын получит 7/10 всех денег. Построим прямую OD, характеризующую второй способ раздела.

4. Сын получил на 15000 рублей больше, чем предполагалось. Отметим на горизонтальной оси точку М, соответствующую этой сумме и проведем через нее прямую MN, параллельную прямой ос до пересечения с прямлй OD в некоторой точке N.

5. Спроецировав точку N на вертикальную ось, мы узнаем общую сумму денег. В данном случае она составляет 50000 рублей. Спроецировав точку N на горизонтальную ось, мы найдем долю сына - 35000 рублей. Значит дочь получит 15000 рублей.

Ответ: общая сумма денег равна 50000 рублей, сын получил 35000 рублей, дочь получила 15000 рублей.

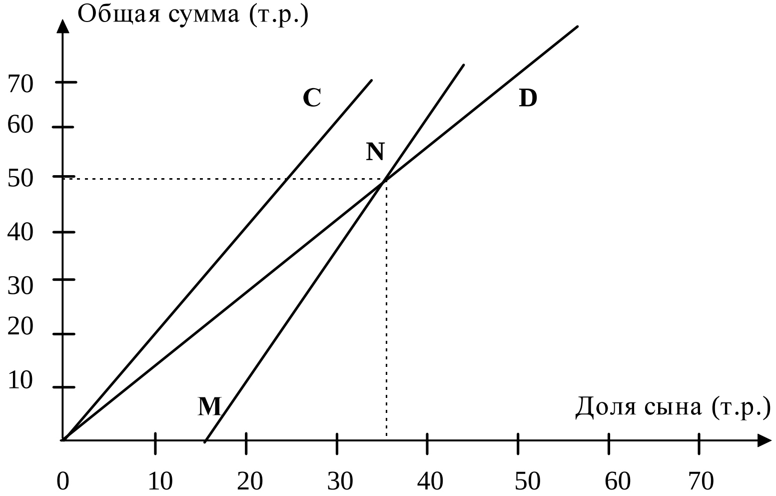

Рис.15.

Упражнение 3. Гонорар за книгу распределили между тремя авторами в отношении 2 : 3 : 4. Если бы гонорар распределили в отношении 3 : 4 : 5, то один из авторов получил бы на 5000 рублей больше. Чему равен гонорар и сколько получил каждый автор?

Задача 4. Сплав двух металлов весом 120 грамм при взвешивании в воде весит 70 грамм. Сколько каждого металла содержится в данном сплаве, если 30 грамм первого металла при взвешивании в воде весят 15 грамм, а 30 грамм второго металла при взвешивании в воде весят 25 грамм?

Решение

1. По вертикальной оси будем откладывать вес металлов на воздухе, а по горизонтальной оси будем откладывать вес металлов в воде (рис.16).

2. Зная, что 30 грамм первого металла весят в воде 15 грамм, построим прямую OC, характеризующую данный металл. Аналогично строим прямую OD, устанавливающую зависимость между весом второго металла на воздухе и в воде.

3. Через отметку 120 вертикальной оси, соответствующую весу сплава, проводим горизонтальную прямую. Точки ее пересечения с прямыми OC и OD обозначим соответственно M и N.

4. Через отметку 70 на горизонтальной оси, соответствующую весу сплава в воде, проводим вертикаль до пересечения с отрезком MN в точке K. Если вертикаль не пересекает отрезок MN, то в условии задачи содержится ошибка.

5. Прямая, проведенная через точки O и K, будет давать зависимость между весом имеющегося сплава на воздухе и в воде.

6. Отношение длин отрезков MK : KN дает пропорцию, в которой содержатся в сплаве второй и первый металл соответственно. В данном сплаве содержится 1 часть второго металла и 3 части первого.

Таким образом, в 120 граммах сплава 30 грамм составляет вес второго металла и 90 грамм составляет вес первого металла.

Заметим, что проведя прямую через отметку 120 на горизонтальной оси и точку N до пересечения с прямой OC в некоторой точке P, а затем, проведя прямую через точки P и K до пересечения с горизонтальной осью, мы можем просто прочитать на горизонтальной оси значение 30 соответствующее количеству второго металла в данном сплаве.

Правильность решения легко установить проверкой по условию задачи.

Ответ: сплав содержит 90 грамм первого металла и 30 грамм второго металла.

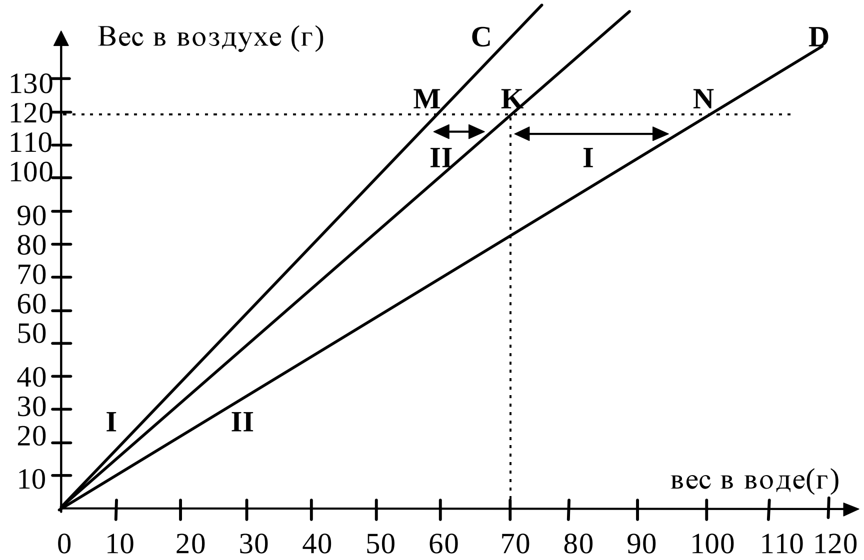

Рис.16.

Упражнение 4. Латунь состоит из сплава меди и цинка. Кусок латуни весом 200 г при погружении в воду весит на 24 г меньше, другими словами, теряет в воде 24 г. Сколько в нем содержится меди и цинка отдельно, если известно, что 90 г меди теряет в воде 10 г, а 35 г цинка теряют в воде 5 г?

Задача 5. Число коров на одной молочной ферме на 50% меньше, чем на другой, но средний удой каждой коровы на 40% больше. На какой ферме получают молока меньше и на сколько процентов?

Решение

1. По горизонтали оси будем откладывать количество коров в процентах от числа коров второй фермы. По вертикальной оси будем откладывать общее количество надоенного молока в процентах от общего надоя коров второй фермы (ис.17).

2. Соединив точку C (100, 100) с началом координат, мы получим прямую, устанавливающую зависимость общего надоя от количества коров на второй ферме.

3. Так как на первой ферме удой каждой коровы на 40% больше, чем на второй ферме, то, соединив точку D(100, 140) с началом координат, мы получим график зависимости общего надоя от количества коров первой фермы.

4. Так как на первой ферме коров на 50% меньше, чем на второй, то, проведя вертикаль через отметку 50 горизонтальной оси до пересечения с прямой OD в некоторой точке M и спроецировав эту точку на вертикальную ось, мы получим 70%. Это означает, что коровы первой фермы дают всего 70% молока, получаемого на второй ферме. Таким образом, на первой ферме молока получают на 30% меньше, чем на второй.

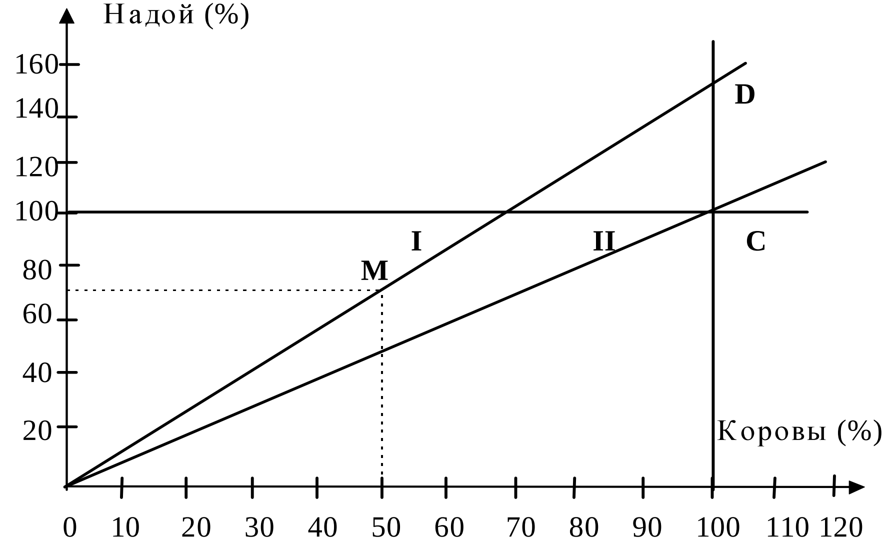

Рис.17.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Предположим, что на второй ферме 10 условных коров и каждая дает 5 условных литров молока за некоторое время.
2. Тогда на первой ферме 5 условных коров и каждая дает на 40% больше, т.е. 7 условных литров молока за то же время.
3. Общий надой на второй ферме 50 у.е., а на первой 35 у.е.
4. На первой ферме молока получают на 15 у.е. меньше, чем на второй, что составляет 30%.

Ответ: на первой ферме молока получают на 30% меньше, чем на второй.

Упражнение 5. Ширину прямоугольного участка земли увеличили на 40%, а длину уменьшили на 25%. На сколько процентов изменилась площадь участка? Как изменится результат, если длину участка увеличить на 40%, а ширину уменьшить на 25%?

§ 4. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ

Задача 1. Чтобы выкачать воду из котлована, поставили два насоса. Оба насоса могли бы выкачать всю воду за 10 часов. Однако, после 3 часов совместной работы один насос сломался и другому насосу пришлось работать еще 11 часов, чтобы выкачать оставшуюся воду. За сколько часов, действуя отдельно, каждый насос мог бы выкачать всю воду из котлована?

Решение

1. По вертикали отложим отрезок, соответствующий количеству воды в котловане, например 8 см (рис.18).

2. На горизонтальных осях будем откладывать время работы насосов, предположив, что насосы начали работу в 6 часов утра.

3. Всю работу оба насоса вместе могут выполнить за 10 часов, т.е. до 16 часов. Зная это, нарисуем график зависимости количества выкачанной из котлована воды от времени работы насосов.

4. Отметим на нем точку C, момент, когда сломался первый насос.

5. Отметим на верхней оси времени точку D, момент окончания работы вторым насосом.

6. Проведем прямую через точки D и C до пересечения с нижней осью времени, в данном случае в отметке 3. Эта прямая задает график откачивания воды одним вторым насосом. По графику видно, что если второй насос один начал бы выкачивать воду в 3 часа, то окончил бы работу в 23 часа. Следовательно, второму насосу потребуется для выкачивания всей воды 20 часов.

Так как оба насоса вместе выкачивают воду за 10 часов, то первому насосу потребуется также 20 часов для откачиния воды из котлована.

Арифметический способ решения задачи.
1. Предположим, что в котловане всего 100 у.е. воды.
2. Так как оба насоса откачивают воду за 10 часов, то за час они выкачают 10 у.е. воды.
3. За 3 часа совместной работы насосы выкачивают 30 у.е. воды. Останется 70 у.е. воды.
4. Второй насос выкачает оставшуюся воду за 14 часов. Значит, за один час он выкачает 5 у.е. воды.
5. Вместе оба насоса выкачивают за 1 час 10 у.е. воды, поэтому первый выкачивает 5 у.е. воды в час.

Ответ: каждый насос мог бы выкачать всю воду из котлована за 20 часов.

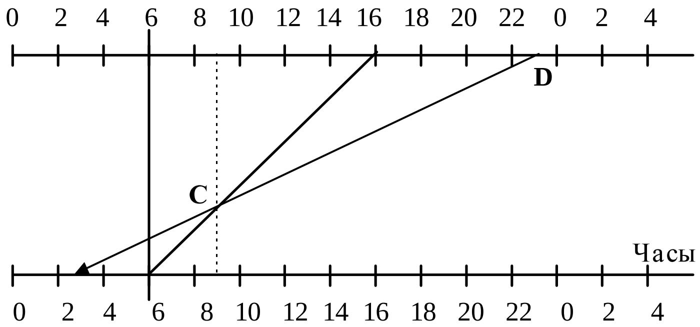

Рис.18.

Упражнение 1. Чтобы наполнить ванну вместимостью 200 литров на 15 минут, открыли сначала кран с горячей водой, из которого поступает в минуту 10 литров воды. Затем этот кран закрыли и ванну заполнили из крана с холодной водой, через который оступает 15 литров воды в минуту. Сколько времени был открыт каждый кран?

Задача 2. Отец, сын и дочь собирали землянику на приусадебном участке. Отец самостоятельно может собрать всю землянику за 5 часов, сын - за 9 часов и дочь также за 9 часов. Первый час дочь готовила обед и ягоду не собирала. Когда дочь начала собирать ягоду, сын ушел ловить карасей. Через 1 час 30 минут вернулся сын, но отец устроил себе перерыв на один час. За сколько времени отец, сын и дочь собрали всю землянику?

Решение

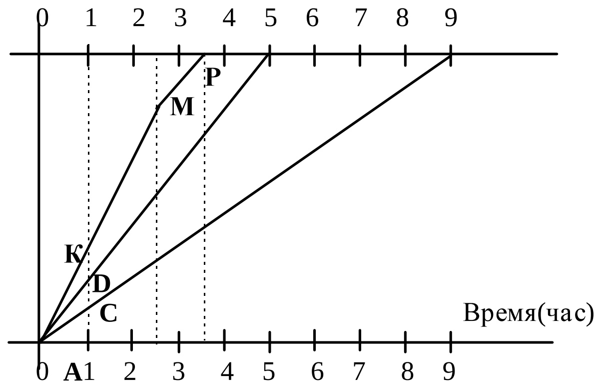

Рис.19.

1. На вертикальной оси отложим соответствующий количеству земляники в некоторых условных единицах. По горизонтальной оси будем откладывать время в часах от 0 до 9 часов (рис.19).

2. Зная, что всю работу по сбору ягоды дети могут выполнить за 9 часов, а отец за 5 часов, нарисуем график выполнения работы каждым членом семьи.

3. Обозначив отметку 1 на нижней оси времени буквой А, проведем через нее вертикальную линию. Пересечение ее с графиками обозначим буквами С и D. Отрезки AD и AC соответствуют производительности отца и детей. Сумма этих отрезков дает отрезок АК, который соответствует объему выполненной работы отцом и одним ребенком за 1 час. Соединив точки 0 и К отрезком прямой линии, получим график выполнения работы в течение первого часа.

4. Аналогичные построения проведем в точках 2,5 часа и 3,5 часа нижней оси времени. В результате получим график выполнения работ по сбору земляники - ломаную АКМР. Заметим, что точка Р лежит на верхней оси времени, т.е. вся работа выполнена и время выполнения равно 3,5 часа.

Решим задачу арифметическим способом.
1. Пусть вся работа равна 45 у.е.
2. Производительность отца равна 45 : 5 = 9 у.е./час, детей - 45 : 9 = 5 у.е./час.
3. Отец и сын работали вместе 1 час и за это время выполнили 14 у.е. работы.
4. За время работы отца и дочери сделана (9 + 5) · 1,5 = 21 у.е. работы.
5. За время работы детей сделано 10 у.е. работы.
6. Всего выполнено 14 + 21 + 10 = 45 у.е. работы, т.е. вся работа. Время работы 3,5 часа.

Ответ: отец, сын и дочь собрали землянику за 3,5 часа.

Упражнение 2. Трое землекопов копали канаву. Первый может выкопать ее за 12 часов, второй за 15 часов и третий за 20 часов. Сначала 4 часа работали первый и третий землекопы, затем 2 часа работали первый и второй землеко-пы. Оставшуюся часть работы выполнил один третий землекоп. Сколько всего времени потратили землекопы на выполнение работы?

Задача 3. Первый и второй трактористы могут вспахать некоторое поле за 3 часа, второй и третий за 4 часа, а первый и третий за 6 часов. Сколько времени потребуется трем трактористам, чтобы вместе вспахать это поле?

Решение

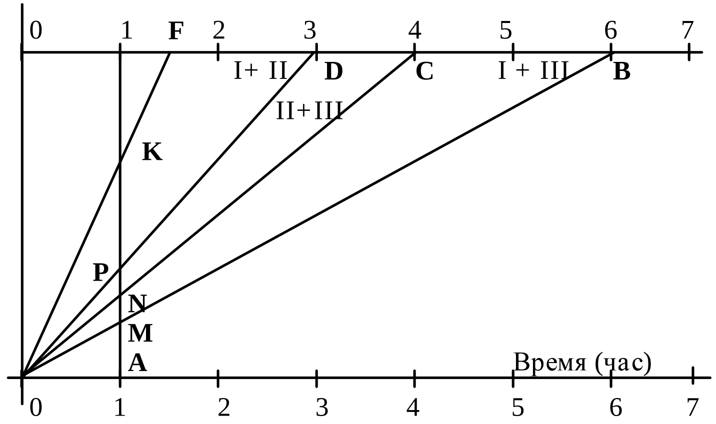

Рис.20.

1. На вертикальной оси отложим отрезок произвольной длины, например 12 см, соответствующий площади поля в условных единицах. По горизонтальным осям будем откладывать время в часах в масштабе: 1 часу соответствует 3 см (ри.20).

2. Зная, что первый и третий трактористы вспашут все поле за 6 часов, построим прямую OB, отражающую зависимость вспаханной площади от времени работы трактористов. Аналогично построим прямые OC и OD.

3. Проведя через любую точку горизонтальной оси, например отметку 1 час, вертикальную линию и отметив на ней M, N, P пересечения ее с прямыми OB. OC и OD, построим на ней сумму отрезков AM, AN и AP. Получим точку К. Спроецировав точку К на вертикальную ось, мы можем узнать, какую часть поля вспашут 2 первых, 2 вторых и 2 третьих тракториста при совместной работе в течение одного часа. Проведя прямую OK до пересечения с верхней горизонтальной осью, мы попадем в точку F, соответствующую времени 1 час 20 минут. Это половина необходимого времени, так ак каждый тракторист участвует дважды в работе. Значит, для того, чтобы вспахать все поле трех трактористам потребуется 2 часа 40 минут.

Решим эту задачу арифметическим способом.

1. Предположим, что площадь всего поля составляет 12 у.е.

2. Тогда производительность совместной работы первого и второго тракториста будет равна 12 : 3 = 4 у.е./час, второго и третьего 3 у.е./час, первого и третьего - 2 у.е./час.

3. Сложив эти производительности и поделив на 2, мы получим производительность трех тракторов при совместной работе. Она равна 4,5 у.е. в час.

4. Все поле трактористы вспашут за 12 : 4,5 = $2\frac{2}{3}$ = 2 часа 40 минут.

Ответ: для вспашки всего поля трактористам при совместной работе потребуется 2 часа 40 минут.

Упражнение 3. К сосуду присоединены 4 трубы. Если открыть первую, вторую и третью трубы, то сосуд наполнится через 9 часов; если открыть вторую, третью и четвертую - через 6 часов. Если открыть первую, третью и четвертую трубы, то сосуд наполнится через 3 часа, а если открыть первую, вторую и четвертую - через 2 часа. За какое время наполнится сосуд, если открыть все четыре трубы?

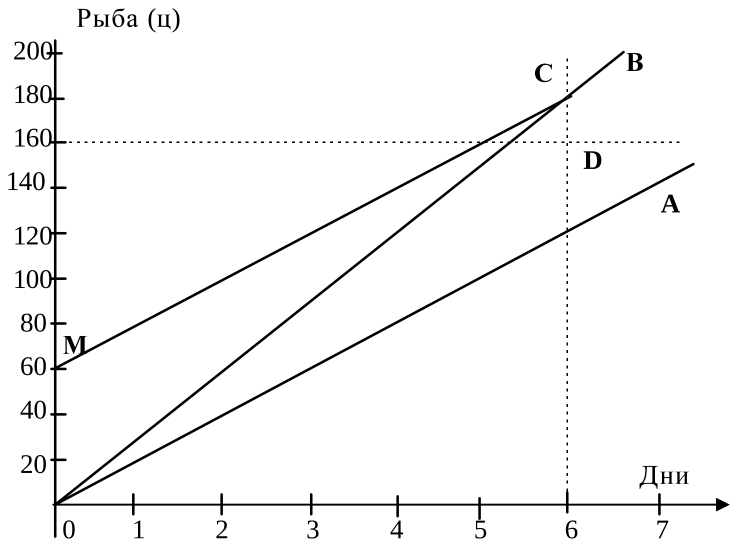

Рис.21.

Задача 4. Вылавливая по 30 центнеров рыбы в день, рыболовецкая бригада перевыполнит норму вылова рыбы на 20 центнеров. Вылавливая по 20 центнеров в день, рыболовецкая бригада выловит меньше недельной нормы на 40 центнеров. Сколько дней в неделю бригада выходит на лов рыбы и какова недельная норма вылова?

Решение

1. По вертикальной оси будем откладывать количество выловленной рыбы в центнерах, по горизонтальной оси - дни выхода на ловлю.

2. Зная, что в день бригада вылавливает по 30 ц или по 20 ц, нарисуем прямые OB и OA, выражающие зависимость количества выловленной рыбы от времени (рис.21).

3. Так как разность в уловах за неделю составит 20 + 40 = 60 ц, то отложим на вертикальной оси 60 ц и через полученную точку

М проведем прямую, параллельную прямой ОА до пересечения с прямой ОВ в некоторой точке С.

4. Спроецировав точку С на ось времени, получим 6, количество дней выхода бригады на работу.

5. Отложив от точки С вниз отрезок в 20 ц, мы получим точку D.

6. Спроецировав точку D на вертикальную ось, получим недельную норму вылова рыбы - 160 ц.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Разность в уловах за неделю 60 ц.
2. Разность в уловах за день 10 ц.
3. Количество дней выхода на ловлю 60 : 10 = 6.
4. Недельная норма вылова 6 · 30 - 20 = 6· 20 + 40 = 160 ц рыбы.

Ответ: бригада ловит рыбу 6 дней в неделю, недельная норма равна 160 центнеров.

Упражнение 4. Обрабатывая по 11 деталей в час, рабочий постоянно делал на 36 деталей меньше дневной нормы. Сделав дополнительное приспособление к станку, рабочий стал обрабатывать по 18 деталей в час и перевыполнять дневную норму на 34 детали. Сколько деталей в день должен был обрабатывать рабочий по норме?

Задача 5. За один час по плану ткачиха может изготовить 100 погонных метров ткани. Изготовляя по 150 метров ткани в час, она выполнила работу на 2 часа раньше срока и изготовила сверх дневного задания 200 метров ткани. Сколь

ко ткани должна была изготовлять ткачиха за день по плану?

Решение

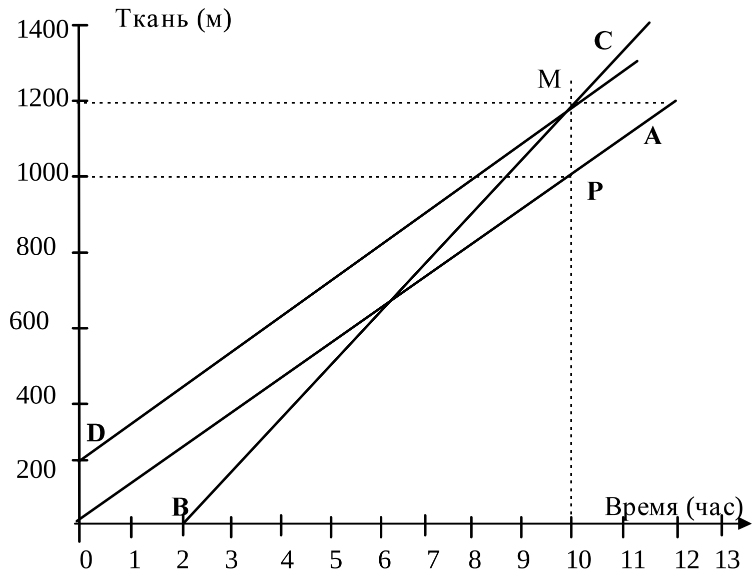

Рис.22.

1. По вертикальной оси мы будем откладывать количество изготовленной ткани в погонных метрах, по горизонтальной оси - время работы.

2. Зная плановую производительность, 100 метров в час, построим прямую ОА, выражающую зависимость количества изготовленной ткани от времени работы (рис.22).

3. Зная реальную производительность, 150 метров в час, построим прямую ВС, начав ее на 2 часа позже, т.к. по условию ткачиха кончила работу на 2 часа раньше.

4. По вертикальной оси отложим количество ткани, изготовленной сверх плана, 200 метров. Получим точку D. Через точку D проведем прямую, параллельную прямой ОА до пересечения с прямой ВС в некоторой точке М.

5. Спроецировав точку М на ось времени, получим планируемое время работы, в нашем случае 10 часов.

6. Обозначив пересечение вертикали, проведенной через точку М и прямую ОА, буквой Р и спроецировав точку Р на вертикальную ось, найдем планируемое количество ткани на день - 1000 погонных метров.

Решим задачу арифметическим способом.

1. Если бы ткачиха работала столько времени, сколько нужно работать по плану, то она изготовила бы на 200 + 2 · 150 = 500 метров ткани.
2. Разность производительностей 150 - 100 = 50 метров в час.
3. Плановое время работы 500 : 50 = 10 часов.
4. Плановое количество ткани 100 · 10 = 1000 метров.

Ответ: за день ткачиха должна была по плану изготовить 1000 погонных метров ткани.

Упражнение 5. Ремонтная мастерская должна ремонтировать по плану 7 тракторов в день. Но так как сломанные трактора поступали еще, то мастерская стала ремонтировать по 9 тракторов в день. В результате мастерская закончила ремонт на 3 дня раньше срока и отремонтировала при этом на 5 тракторов больше. Сколько тракторов планировала отремонтировать мастерская?

§ 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Два туриста вышли из селения А одновременно и в одном направлении. Один шел со скоростью 4 км/час, другой - со скоростью 6 км/час. Через 3 часа второй турист уменьшил скорость до 2 км/час. На каком расстоянии от селения А первый турист догонит второго?

Ответ: 24 км.

2. Бригада лесорубов должна была заготовлять ежедневно по 60 кубометров дров. Бригада приняла решение выполнить работу раньше срока и стала заготовлять по 80 кубометров дров. Однако через 4 дня такой работы из-за поломки бензопил бригада смогла заготавливать только по 70 кубометров дров. В результате бригада закончила работу на один день раньше срока и заготовила при этом на 40 кубометров дров больше, чем планировалось. Сколько кубометров дров должна была заготовить бригада лесорубов по плану?

Ответ: 420 кубометров.

3. Если в сосуде открыть одновременно оба крана - наполняющий и выпускающий, то сосуд наполнится за 20 минут. Однажды в течение 8 минут были открыты оба крана, а затем выпускающий кран был закрыт и сосуд наполнился через 9 минут после этого. За сколько минут наполнится сосуд, если открыть только первый кран?

Ответ: 15 минут.

4.Два автомобиля, выехав одновременно из двух городов навстречу друг другу, встретились через 9 часов. Скорости автомобилей относятся как 2 : 5. На сколько часов позже второго автомобиля должен выехать первый автомобиль, чтобы их встреча произошла на расстоянии одной трети пути от А к В?

Ответ: 2,1 часа.

5. Пешеход идет со скоростью 4 км/час, останавливаясь на отдых через каждые 6 км. Продолжительность каждой остановки, кроме каждой третьей, равна 15 минут, а третьей - 30 минут. Какое расстояние шел пешеход, если отправившись в путь в 6 часов утра, он пришел на место в 14 часов?

Ответ: 27 км.

6. Объем строительных работ увеличен на 60%. На сколько процентов нужно уменьшить количество рабочих, если за счет

внедрения новой техники производительность труда будет увеличена на 100%?

Ответ: на 20%.

7. В бассейн проведены 3 трубы. Через первую и вторую трубы бассейн наполняется за 10 часов, через вторую и третью - за 6 часов, через первую и третью - за 3 часа. За какое время наполнится бассейн при совместном действии трех труб?

Ответ: 3 часа 20 минут.

8. В 9 часов утра из города А в город В выехал велосипедист. В 10 часов утра вслед за ним выехал другой велосипедист. То расстояние, которое первый велосипедист проезжает за 14 часов, второй проезжает за 10 часов. В котором часу второй велосипедист догнал первого?

Ответ: 12 часов 30 минут.

9. Одна свеча в 3 раза длиннее второй и сгорает за 2 часа. Вторая свеча толще первой и сгорает за 4 часа. Через какое время они будут иметь одинаковую длину, если их зажечь одновременно?

Ответ: 1,6 часа.

10. За какое время 4 косца смогут скосить вместе всю траву на лугу, если каждые три из них смогут это сделать за 8 дней?

Ответ: 6 дней.

11. Моторная лодка плывет со скоростью 6 км/час по течению и 4 км/час против течения реки. Отправившись однажды в 9 часов утра, лодка нигде не задерживаясь, приплыла обратно в 12 часов. Какое расстояние проплыла лодка против течения реки?

Ответ: 7,2 км.

12. Группа школьников, собирая виноград по 250 кг в час, перевыполнит дневное задание на 450 кг. Если школьники будут собирать по 150 кг винограда в час, то соберут меньше дневной нормы на 250 кг. Сколько часов в день работают школьники и какова дневная норма?

Ответ: 7 часов, 1300 кг.

13. В 6 часов утра из пункта А в пункт В, со скоростью 10 км/час выехал велосипедист. Через два часа вслед за ним со скоростью 5 км/час вышел турист. Через некоторое время велосипедист повернул обратно и с прежней скоростью двигался до встречи с туристом. После встречи с туристом велосипедист снова повернул и, двигаясь с прежней скоростью,

приехал в пункт В на 1 час 50 минут раньше туриста. В какое

время и на каком расстоянии от пункта А велосипедист изменил направление движения в первый раз, если расстояние между пунктами А и В равно 25 км?

Ответ: 8 часов, 20 км.

14. Один сплав содержит металлы в отношении 3 : 5, другой сплав содержит те же металлы в отношении 1 : 15. Сколько килограмм первого сплава нужно добавить к 8 килограммам второго сплава, чтобы получить сплав, содержащий эти же металлы в отношении 1 : 3?

Ответ: 12 кг.

15. В бассейн проведено три трубы. Первая и вторая вместе наполняют его за 30 минут, первая и третья - за 45 минут, а вторая и третья - за 90 минут. За какое время наполнится бассейн, если открыть все три трубы одновременно?

Ответ: 15 минут.

16. Две бригады колхозников должны были закончить уборку картофеля за 6 дней. После 4 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, и поэтому вторая бригада закончила оставшуюся часть работы за 3 дня. За какое время могла бы убрать картофель каждая бригада, работая сдельно?

Ответ: 9 дней, 18 дней.

17. На дорогу от А до В и обратно велосипедист затратил 7 часов. Зная, что из А в В велосипедист ехал со скоростью 9 км/час, а из В в А со скоростью 12 км/час, определить расстояние между А и В.

Ответ: 36 км.

18. Отец предполагал разделить некоторую сумму денег между тремя сыновьями в отношении 10 : 9 : 8. Затем он изменил свое решение и разделил ту же сумму в отношении 7 : 5 : 3. Известно, что один из сыновей получил в результате такого раздела на 400 рублей больше другого. Сколько получил каждый?

Ответ: 700 руб., 500 руб., 300 руб.

19. Два трактора могут вспахать поле за 8 дней, если будут работать вместе. Если же оба трактора вспашут вместе только третью часть поля, то один первый трактор сможет закончить работу за 8 дней. За сколько дней сможет вспахать все поле один первый трактор?

Ответ: 12 дней.

20. Имеются два сплава цинка с медью. Первый сплав содержит 300 г цинка и 500 г меди. Второй сплав содержит 210 г цинка и 90 г меди. Сколько нужно взять каждого из этих сплавов, чтобы получить 400 г сплава, содержащего 215 г цинка?

Ответ: по 200 г каждого.

21. Велосипедист выехал из пункта А в пункт В со скоростью 15 км/час. Через час вслед за ним выехал мотоциклист. Мотоциклист нагнал велосипедиста на расстоянии 25 км от пункта А. После того, как велосипедист проехал еще 15 км, он встретил мотоциклиста, возвращающегося из пункта В. Чему равно расстояние от А до В?

Ответ: 51,25 км.

22. Билет в кинотеатре стоил 300 рублей. После того как цену на билет понизили, число посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько рублей снижена цена билета в кинотеатр?

Ответ: 75 рублей.

23. В 7 часов утра со скоростью 30 км/час из города А выехал мотоциклист. В 8 часов утра вслед за ним со скоростью 20 км/час выехал велосипедист. Через некоторое время мотоциклист повернул назад в пункт А и поехал с прежней скоростью. После встречи с мотоциклистом, велосипедист повернул назад и, двигаясь с прежней скоростью, приехал в пункт А в 14 часов. В какое время и н каком расстоянии от пункта А отоциклист повернул назад?

Ответ: в 10 часов на расстоянии 90 км.

24. Когда магазин повысил цену на яблоки, то спрос на них упал на 20%, а общая выручка от их продажи за день уменьшилась на 10%. На сколько рублей повышена цена на яблоки, если первоначально 1 кг яблок стоил 6000 рублей?

Ответ: 750 руб.

25. Для наполнения бассейна существуют два насоса. Оба насоса наполняют бассейн за 6 часов. Производительность одного насоса в 1,5 раза меньше производительности второго. За какое время будет наполнен бассейн, если треть бассейна наполнить с помощью первого насоса, а оставшуюся часть с помощью второго?

Ответ: 11 часов 40 минут.

26. Курьер должен был доставить письмо из пункта А в пункт В и вернуться обратно с ответом. Весь путь туда и обратно он проехал за 6 часов. От А до В он ехал со скоростью 7 км/час, а обратно 5 км/час. Определить расстояние от А до В.

Ответ: 17,5 км.

27. Два землекопа могли бы выкопать канаву за 8 часов, если бы работали вместе. После двух часов совместной работы первый землекоп ушел и пришел только через 9 часов. После еще двух часов совместной работы канава была вырыта. За какое время каждый землекоп в отдельности мог бы вырыть канаву?

Ответ: 13 часов 20 минут, 20 часов.

28. Турист расчитал, что, идя с постоянной скоростью определенное время, он придет на вокзал в момент прихода поезда. Но планы изменились и турист решил сократить время в пути на 35% от запланированного, увеличив скорость на 50% от запланированной. Успеет ли турист прийти на вокзал к моменту прихода поезда? Как изменится результат, если турист уменьшит скорость движения на 35% и увеличит время движения на 50%?

Ответ: не успеет; никак.

29. Двое рабочих взялись выполнить некоторую работу. Первый может выполнить ее за 20 минут. После того как первый рабочий отработал 7 минут, к работе приступил второй рабочий. После 5 минут совместной работы работа была полностью выполнена. За какое время один второй рабочий может выполнить всю работу?

Ответ: 12,5 минут.

30. В сосуде имеется три крана. Через первые два вода вливается в сосуд, а через третий выливается из сосуда. Через первый кран сосуд наполняется за 3 часа, через второй кран - за 4 часа. Через третий кран вся вода из полного сосуда вытекает за 12 часов. За какое время сосуд наполнится, если открыть все три крана?

Ответ: 2 часа.

31. Из города А в город В вышел турист. Одновременно навстречу ему из города В выехал мотоциклист. Мотоциклист ехал со скоростью 40 км/час и встретил туриста через 2 часа после выезда из В. Если бы мотоциклист ехал со скоростью 25 км/час, то встреча произошла бы через 3 часа, Чему равно расстояние между городами А и В? Сколько времени потребовалось туристу, чтобы пройти это расстояние?

Ответ: 90 км; 18 часов.

32. Двум рабочим поручено изготовить некоторое количество деталей. Известно, что второй рабочий приступит к работе на 2 часа раньше первого. Если первый рабочий будет делать по 6 деталей в час, то через 1 час совместной работы задание будет выполнено. Если же первый рабочий будет делать по 2 детали в час, то задание будет выполнено через 2 часа совместной работы. Сколько всего деталей поручено изготовить рабочим? За какое время второй рабочий сможет самостоятельно выполнить задание?

Ответ: 12 деталей; 6 часов.

33. Мотоциклист выехал из города А в город В в 7 часов утра. В 11 часов он встретил велосипедиста, ехавшего из В в А. В город В мотоциклист приехал в 13 часов. Выехав из города В в 15 часов и направляясь в город А, мотоциклист поехал с прежней скоростью и догнал велосипедиста в 20 часов. Сколько времени ехал велосипедист от города В до города А?

Ответ: 18 часов.

34. По кольцевому шоссе с постоянными скоростями движутся два мотоциклиста. Если они движутся навстречу друг другу, то встречаются через каждые 3 минуты. Если же мотоциклисты движутся в одном направлении, то первый

догоняет второго через каждые 12 минут. Сколько времени требуется каждому мотоциклисту, чтобы проехать путь, равный длине кольцевого шоссе?

Ответ: 4,8 минуты; 8 минут.

35. Между морскими пристанями А и В курсируют безостановочно два катера. Первый катер проходит путь от А до В за 3 минуты, второй - за 12 минут. Через какое время катера встретятся, если известно, что они одновременно отплыли от пристани А?

Ответ: 4,8 минуты; 8 минут и т.д.

Литература

1. Рудин В.Н., Рудина Е.И. Текстовые задачи: Пособие для учителей и школьников. Изд-во ТГУ, Томск, 1994.

Ответы

§ 1. Упр. 1 - см. рис. 1.

2 - а) 2 часа ; б) остановка ; в) в 10 час. в 2 раза; г) 5 часов.

§ 2. Упр. 1 - в 12,8 часа

2 - успеют

3 - 22 часа

4 - не успеет

5 - время встречи не изменилось

6 - за 30 минут

7 - на 1 час. 20 мин.

8 - за 11 час.; в 2 раза

9 - в 13 час.

10 - 1,8 часа

11 - 4 часа; 80 км

12 - 80 км; 40 мин.; 40 мин

§ 3. Упр.1 - на 150%, т.е. в 2,5 раза

2 - 3/3

3 - 180000, 40000, 60000, 80000

4 - 144 г; 56 г

5 - увеличилась на 5%; никак

§ 4. Упр. 1 - 5 мин.; 10 мин.

2 - 9 час. 20 мин.

3 - 2 часа 42 мин.

4 - 146 деталей

5 - 112.